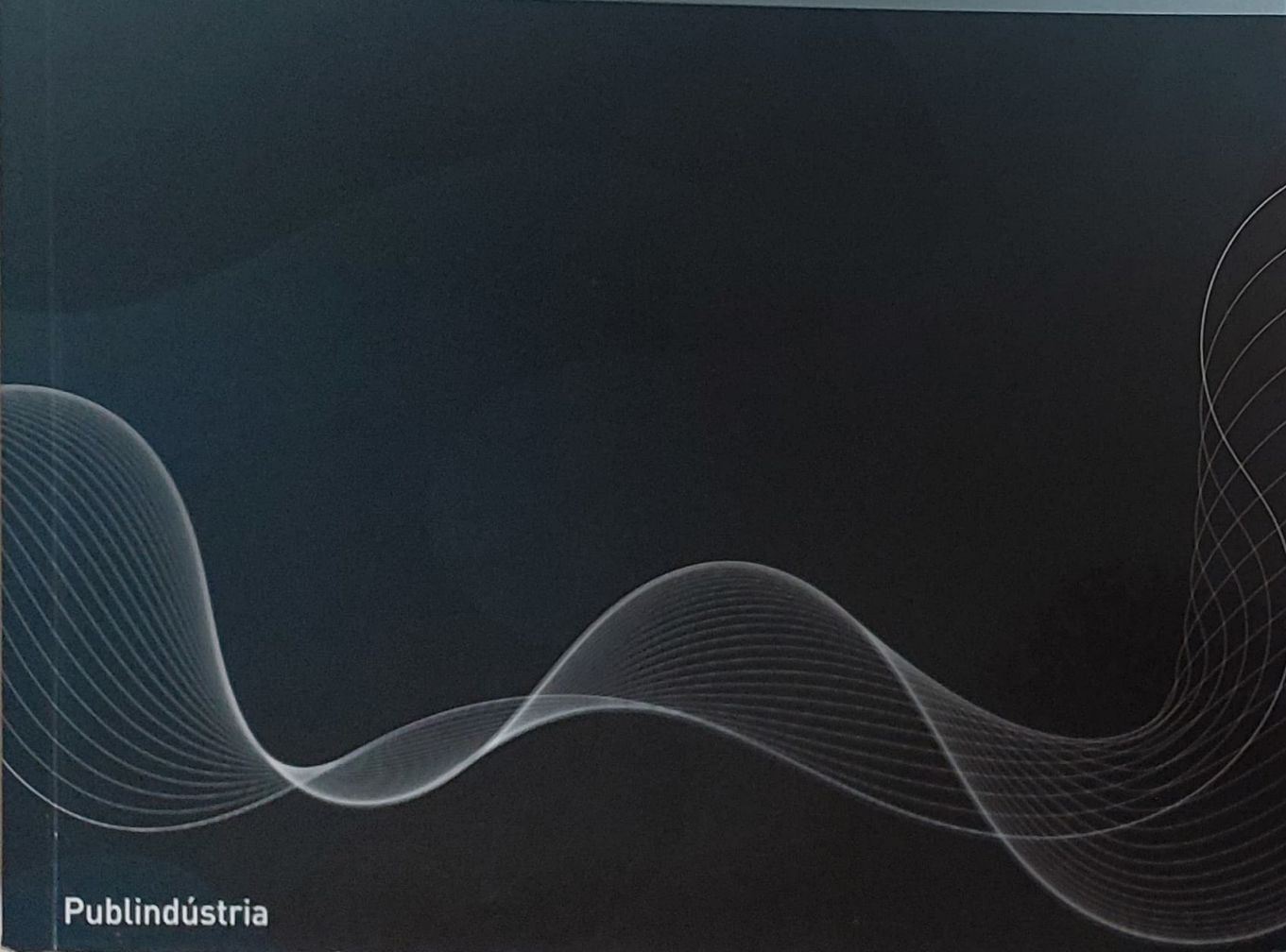
ÁLGEBRA MATRICIAL

Conceitos, Exercícios e Aplicações

MATLAB® examples

Ana C. Meira Castro | Ana Júlia Viamonte | António Varejão Sousa



Publindústria

ÁLGEBRA MATRICIAL

Conceitos, Exercícios e Aplicações

Prefácio

A Álgebra Linear e a Geometria Analítica são áreas de saber da Matemática que promovem o raciocínio abstrato, um fator primordial na formação técnico-científica superior de um engenheiro. Com a publicação do presente livro pretende-se fornecer aos estudantes dos cursos de Engenharia um texto que seja, simultaneamente, elementar e rigoroso e que lhes permita aprender os conceitos básicos do cálculo matricial e as suas aplicações.

Conscientes da vastidão de possíveis caminhos a seguir na apresentação das matérias inerentes ao cálculo matricial, os autores optaram por seguir uma sequência simples que tivesse em linha de conta os atuais ajustes dos objetivos da unidade curricular em que esta temática se enquadra, face à atual tendência para a diminuição dos tempos letivos e incentivo à utilização de *software* MATLAB®.

Neste sentido, este livro está organizado em cinco capítulos, ao longo dos quais se procurou obedecer a uma estrutura evolutiva em torno do rigor e da formalidade, mas sem excessos de nomenclatura. No primeiro, apresenta-se uma breve revisão dos conceitos de função e de estruturas algébricas, aprendidos no secundário no que se refere a operações algébricas entre elementos de um dado conjunto. O segundo capítulo incide sobre o cálculo matricial, introduzindo-se as operações matriciais, o cálculo de determinantes e respetivas propriedades e aplicações destas novas entidades. No terceiro capítulo apresenta-se a resolução e discussão de sistemas de equações lineares com recurso ao cálculo matricial. No quarto capítulo, dá-se continuidade ao estudo das estruturas algébricas, estudando-se os espaços vetoriais sobre um corpo e as transformações lineares. Termina-se com um quinto capítulo, dedicado à aplicação destes conceitos à geometria analítica em espaços euclidianos.

No final de cada capítulo, é proporcionado um conjunto de exercícios variados e não repetitivos, em número suficiente e equilibrado, apresentando-se alguns deles já resolvidos, propondo-se outros para resolução e ilustrando algumas aplicações práticas de integração de conhecimentos, recorrendo a *software* de cálculo algébrico e numérico MATLAB®. Desta forma, pretende-se clarificar as matérias que vão sendo explanadas, encaminhar os alunos para um trabalho de estudo das matérias além das aulas e legitimar o conhecimento destas matérias como ferramentas imprescindíveis para a formulação matemática e resolução de problemas típicos em outras disciplinas do curso de Engenharia.

Conteúdo

Prefácio v

Conteúdo x

1. Revisão de Conceitos Elementares 1

1.1. Função . . . 1
1.2. Estruturas algébricas . . . 4
1.2.1. Grupos . . . 5
1.2.2. Anéis e corpos . . . 11
1.3. O corpo dos números complexos . . . 14
1.3.1. Representação algébrica de um número complexo . . . 15
1.3.2. Representação de um número complexo no plano D'Argand . . . 17
1.3.3. Operações algébricas com números complexos . . . 18
1.3.4. Representação trigonométrica de um número complexo . . . 22
1.3.5. Operações algébricas com números complexos escritos na forma trigonométrica . . . 23
1.3.6. Funções complexas de variável real . . . 24
1.3.7. Representação exponencial de um número complexo. Fórmulas de Euler e de Moivre . . . 25
1.4. Aplicações definidas sobre estruturas algébricas . . . 27
1.4.1. Endomorfismo entre estruturas algébricas . . . 27
1.5. Exercícios resolvidos . . . 29
1.5.1. Exercícios resolvidos relativos a grupos anéis e corpos . . . 29
1.5.2. Exercícios resolvidos relativos a números complexos . . . 36
1.5.3. Exercícios resolvidos relativos a endomorfismos, homomorfismos, isomorfismos e automorfismos . . . 37
1.5.4. Exercícios resolvidos em MATLAB . . . 39
1.6. Exercícios propostos . . . 41
1.7. Soluções dos exercícios propostos . . . 43

2. Cálculo Matricial e Determinantes 47

2.1. Matrizes . . . 47
2.1.1. Notação e classificação . . . 48
2.2. Operações algébricas com matrizes . . . 52
2.2.1. Adição de matrizes . . . 53
2.2.2. Multiplicação de um escalar por uma matriz . . . 54
2.2.3. Multiplicação de matrizes . . . 55
2.2.4. Potenciação de matrizes com expoente natural . . . 61
2.2.5. Matriz transposta . . . 63
2.3. Polinómios . . . 64

2.4. Operações sobre matrizes 65
2.4.1. Traço de uma matriz quadrada 65
2.4.2. Norma de uma matriz quadrada 66
2.5. Algumas matrizes especiais 67
2.6. Equações matriciais 73
2.7. Operações elementares sobre filas de uma matriz 74
2.7.1. Condensação de uma matriz 74
2.7.2. Característica de uma matriz 75
2.8. Determinante de uma matriz quadrada 76
2.8.1. O Teorema de Laplace 79
2.8.2. Algumas propriedades dos determinantes 81
2.8.3. Interpretação geométrica do conceito de determinante 86
2.9. Inversão de matrizes quadradas 87
2.9.1. Cálculo da matriz inversa por condensação 89
2.10. Potências de matrizes (expoente inteiro negativo) 92
2.11. Outras matrizes quadradas especiais 92
2.12. Exercícios resolvidos 94
2.12.1. Exercícios resolvidos em MATLAB 106
2.13. Exercícios propostos 108
2.13.1. Exercícios relativos a operações algébricas com matrizes 108
2.13.2. Exercícios relativos à condensação e característica de uma matriz 113
2.13.3. Exercícios relativos a determinantes 114
2.13.4. Exercícios que envolvem o cálculo da matriz inversa 124
2.14. Soluções dos exercícios propostos 128
2.14.1. Matrizes 128
2.14.2. Condensação e característica de uma matriz 131
2.14.3. Determinantes de uma matriz quadrada 132
2.14.4. Cálculo da matriz inversa 137

3. Sistemas de Equações Lineares **139**
3.1. Representação matricial e notações 140
3.2. Classificação de sistemas 140
3.3. Resolução de sistemas 142
3.3.1. O método de eliminação de Gauss 142
3.3.2. Resolução de sistemas de equações lineares homogéneos 143
3.3.3. Sistemas de Cramer 145
3.4. Discussão de sistemas 148
3.5. Problemas na resolução de sistemas de equações lineares 153
3.5.1. Problemas mal condicionados 153
3.5.2. Problemas associados à não pivotação 154
3.6. Exercícios resolvidos 155
3.6.1. Exercícios resolvidos em MATLAB 162
3.7. Exercícios propostos 167
3.8. Soluções dos exercícios propostos 172

4. Espaços Vetoriais e Transformações Lineares 175
4.1. Espaços vetoriais sobre um corpo . . . 175
4.1.1. Algumas propriedades elementares dos espaços vetoriais . . . 177
4.1.2. O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ . . . 177
4.2. Subespaço vetorial . . . 179
4.2.1. Soma direta de subespaços . . . 181
4.3. Combinação linear de vetores . . . 183
4.3.1. Independência e dependência linear . . . 184
4.3.2. Vetores geradores de um espaço vetorial . . . 187
4.4. Base e dimensão de um espaço vetorial . . . 188
4.4.1. Base de um espaço vetorial . . . 188
4.4.2. Dimensão de um espaço vetorial . . . 189
4.4.3. Matriz de mudança de base . . . 192
4.5. Espaços vetoriais reais com produto interno . . . 196
4.5.1. O produto interno em $\mathbb{R}^n$ . . . 196
4.5.2. Álgebra linear sobre o corpo $\mathbb{R}$ . . . 197
4.5.3. Norma de um vetor . . . 198
4.5.4. Ângulo entre dois vetores . . . 199
4.5.5. Ortogonalidade e ortonormalidade . . . 200
4.5.6. Projeções . . . 201
4.6. Transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ . . . 203
4.6.1. Classificação das transformações lineares . . . 205
4.6.2. Imagem e núcleo de uma transformação linear . . . 206
4.6.3. Representação matricial de uma transformação linear . . . 207
4.6.4. Álgebra de uma matriz associada a uma transformação linear . 211
4.6.5. Valores e vetores próprios de uma transformação linear . . . 211
4.6.6. Matrizes semelhantes . . . 215
4.6.7. Diagonalização de uma matriz quadrada . . . 216
4.7. Exercícios resolvidos . . . 217
4.7.1. Exercícios resolvidos em MATLAB . . . 238
4.8. Exercícios propostos . . . 239
4.8.1. Exercícios relativos a espaços vetoriais . . . 239
4.8.2. Exercícios relativos a transformações lineares . . . 246
4.9. Soluções dos exercícios propostos . . . 250
4.9.1. Exercícios relativos a espaços vetoriais . . . 250
4.9.2. Exercícios relativos a transformações lineares . . . 254

5. Geometria Analítica 257
5.1. Referenciais cartesianos e espaço afim . . . 257
5.2. Operações algébricas com vetores de $\mathbb{R}^3$ . . . 260
5.3. Produto interno (ou escalar) . . . 261
5.4. Produto externo (ou vetorial) . . . 265
5.5. Produto misto . . . 266
5.6. Equações da reta . . . 268
5.7. Equações do plano . . . 270
5.7.1. Planos projetantes . . . 272
5.7.2. Casos particulares da equação de um plano . . . 273

5.8. Problemas de incidência relativos a retas e planos 274
5.8.1. Posição relativa de duas retas 274
5.8.2. Posição relativa de uma reta e um plano 278
5.8.3. Posição relativa de dois planos 279
5.8.4. Posição relativa de três planos 280
5.9. Problemas métricos relativos a retas e planos 282
5.9.1. Distância entre dois pontos 282
5.9.2. Distância de um ponto a um plano 283
5.9.3. Distância de um ponto a uma reta 283
5.9.4. Distância de uma reta a um plano 284
5.9.5. Distância entre dois planos 285
5.9.6. Distância entre duas retas 285
5.9.7. Ângulos 287
5.10. Exercícios resolvidos 288
5.10.1. Retas e planos 288
5.10.2. Exercícios resolvidos em MATLAB 291
5.11. Exercícios propostos 293
5.11.1. Soluções 301

A. Breve introdução ao MATLAB **309**
A.1. Iniciar uma sessão em MATLAB 309
A.2. Ambiente MATLAB 310
A.2.1. Gestão de variáveis 311
A.2.2. Menu e o comando *help* 311
A.2.3. O comando *lookfor* 312
A.3. Expressões 312
A.3.1. Variáveis e constantes pré-definidas 312
A.3.2. Declarações e variáveis 314
A.4. Números e operadores 314
A.5. Funções 314
A.6. Expressões 315
A.6.1. Formatação da saída 315
A.7. Matrizes 316
A.7.1. O símbolo " : " 316
A.7.2. Manipulação de matrizes 317
A.7.3. Operações com matrizes 319
A.7.4. Polinómios 326
A.8. *Scripts* e funções 328
A.8.1. Sistema Algébrico Computacional 328
A.9. Gráficos 330

Bibliografia **333**

CAPÍTULO

1

Revisão de Conceitos Elementares

Um conjunto é uma coleção de objetos bem definidos, podendo estes elementos ser números ou qualquer outra entidade abstrata. Dados dois conjuntos A e B não vazios, mas não necessariamente diferentes, podem-se estabelecer diversas relações entre os seus elementos. Quando se estudam as relações entre dois elementos, por exemplo, a do conjunto A e b do conjunto B, o elemento fundamental nesse estudo é o *par ordenado* (a, b) formado pelas duas coordenadas a e b, sendo a o primeiro elemento ou abcissa e b o segundo elemento ou ordenada.

Os conceitos apresentados com as relações envolvendo dois conjuntos facilmente se estendem a relações envolvendo elementos de três ou mais conjuntos.

Para uma melhor compreensão dos temas abordados nos capítulos seguintes, apresentam-se neste capítulo introdutório alguns conceitos elementares e propriedades associadas às relações entre elementos de dois ou mais conjuntos.

1.1. Função

Definição 1. Produto cartesiano

Considerem-se os conjuntos $A = \{a_1, a_2, ...a_n\}$ e $B = \{b_1, b_2, ...b_n\}$ não vazios. Chama-se *produto cartesiano de A por B*, e representa-se por $A \times B$, ao conjunto de todos os pares ordenados (a_i, b_j) tais que

$$A \times B = \{(a_i, b_j) : a_i \in A \wedge b_j \in B\} \tag{1.1}$$

O número de elementos de $(A \times B)$ é igual ao produto do número de elementos de A pelo número de elementos de B. Se $A = B$, ter-se-á o produto cartesiano $A \times A$

ou, como é usualmente representado, $A^2 = \{(a_i, a_j) : a_i, a_j \in A\}$. Pelo que, generalizando, ter-se-á

$$A^n = \left\{(a_i^1, a_i^2, ..., a_i^n) : a_i^1, a_i^2, ..., a_i^n \in A\right\} \tag{1.2}$$

Se $A, B, \cdots, K$ são n conjuntos não vazios, o seu produto é o conjunto de todas as n-uplas ordenadas, tais que

$$A \times B \times \cdots \times K = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_1 \in A \wedge x_2 \in B \wedge \cdots \wedge x_n \in K\} \tag{1.3}$$

Exemplo 1.

- $\mathbb{R}^n$ é formado por todos os n-uplos ordenados
  $(a_i^1, a_i^2, ..., a_i^n)$ com $a_i^1, a_i^2, ..., a_i^n \in \mathbb{R}$
- Com os conjuntos $A = \{2, 3\}$ e $B = \{4, 5, 6\}$ podem-se formar os seguintes produtos cartesianos
  $A \times B = \{(2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6)\}$
  $B \times A = \{(4,2), (4,3), (5,2), (5,3), (6,2), (6,3)\}$
  $A^2 = \{(2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$
  $B^2 = \{(4,4), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

Definição 2. Função

Dados dois conjuntos A e B, diz-se que f é uma *função* de A em B se a cada elemento $x \in A$ se associa um e um só elemento $y \in B$. Uma função também se designa por *aplicação* e representa-se simbolicamente por

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \longmapsto & B \\ & x & \rightsquigarrow & y = f(x) \end{array} \tag{1.4}$$

onde A corresponde ao *domínio* da função e B ao conjunto de chegada, sendo y a *imagem* do objeto x determinada por f.

Por vezes, a definição simbólica apresentada em 1.4 não é a mais adequada para representar uma dada função. De entre as diversas representações possíveis, as alternativas à definição mais utilizadas baseiam-se em diagramas sagitais (ou de Venn), em tabelas ou na sua representação cartesiana.

De acordo com o tipo de relação entre os elementos dos dois conjuntos A e B, uma função pode classificar-se como injetiva, sobrejetiva ou bijetiva.

Definição 3. Função injetiva

Uma função diz-se *injetiva* se, e só se, a elementos diferentes de A correspondem imagens diferentes em B, isto é

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \tag{1.5}$$

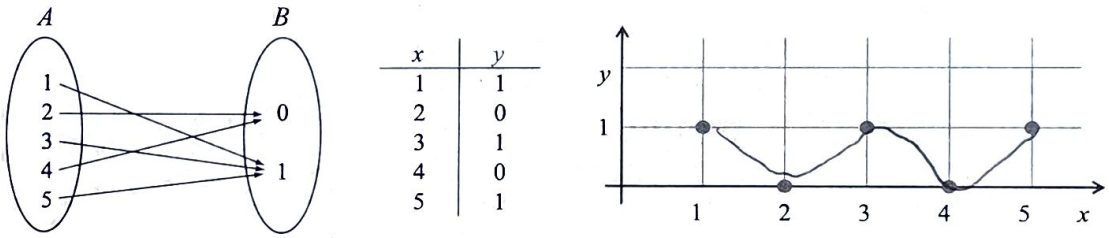
Definição 4. Função sobrejetiva

Uma função diz-se *sobrejetiva* se, e só se, o conjunto das imagens da função, $f(A)$, designado de contradomínio de f, coincidir com o conjunto de chegada, B, isto é

$$f(A) = B \iff \forall y \in B,\ \exists x \in A\ :\ y = f(x) \tag{1.6}$$

Exemplo 2.

Considere-se a função $f(x) = \mathrm{mod}_2(x)$ que determina o resto da divisão inteira de um número x por 2. Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{0, 1\}$ os respetivos domínio e contradomínio da função. Na figura 1.1 apresentam-se representações alternativas para esta função, através de um diagrama sagital (a), de uma tabela (b) e de um gráfico cartesiano (c).



a)

x	y
1	1
2	0
3	1
4	0
5	1

b)

c)

Figura 1.1.: Três modos diferentes de representar a aplicação $f : A \longmapsto B$; por um diagrama sagital (a); por uma tabela, (b); por um gráfico cartesiano (c).

Definição 5. Função bijetiva

Uma função que seja injetiva e sobrejetiva diz-se *bijetiva.*

Definição 6. Operação n-ária

Uma função que relaciona vários elementos de A com um elemento de A, representada simbolicamente por $f : A \times A \times \cdots \times A \longmapsto A$, diz-se *operação n-ária* em A.

Como casos particulares, vai-se referir o das *operações unárias* e o das *operações binárias.*

Definição 7. Operação binária

Seja $\mathbb{K}$ um conjunto não vazio; toda a operação $\theta : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longmapsto \mathbb{K}$ aplicada a 2 quaisquer elementos $x, y \in \mathbb{K}$ recebe o nome de *operação binária* em $\mathbb{K}$ se após a aplicação da operação $\theta(x, y)$ resultar um terceiro elemento, também pertencente a $\mathbb{K}$.

Definição 8. Operação unária

Seja $\mathbb{K}$ um conjunto não vazio; toda a operação $\theta : \mathbb{K} \longmapsto \mathbb{K}$ aplicada a 1 qualquer elemento $x \in \mathbb{K}$ recebe o nome de *operação unária* em $\mathbb{K}$ se após a aplicação da operação, $\theta(x)$ pertencer também a $\mathbb{K}$.

Definição 9. Operação interna
Uma operação binária θ diz-se *operação interna em* $\mathbb{K}$ (ou lei de composição interna em $\mathbb{K}$) se

$$\forall x, y \in \mathbb{K}\, \exists^1 z \in \mathbb{K} : z = x\theta y \tag{1.7}$$

isto é

$$\theta \text{ é uma operação interna} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta : \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \longmapsto \mathbb{K} \\ (x, y) & \rightsquigarrow z = x\theta y \end{cases} \tag{1.8}$$

Exemplo 3.

- A adição e multiplicação usuais de dois números naturais é uma operação binária em $\mathbb{N}$, pois o produto de dois números naturais é também um número natural.
- A subtração e divisão usuais de dois números naturais não é uma operação binária em $\mathbb{N}$, pois o resultado nem sempre é um número natural. $\ominus(5, 9) = 5 - 9$ não é natural.

Definição 10. Operação externa
A operação binária $\theta : \mathbb{J} \times \mathbb{K} \longmapsto \mathbb{K}$ diz-se *operação externa a* $\mathbb{K}$ porque relaciona elementos dos conjuntos $\mathbb{J}$ e $\mathbb{K}$.

Na secção seguinte, apresentam-se as classificações que estas estruturas têm, de acordo com as operações que nelas podem ser efetuadas e das propriedades que estas operações possuem.

1.2. Estruturas algébricas

O estudo dos conjuntos munidos de operações e relações constitui uma classe de objetos designados de *estruturas algébricas*. As estruturas algébricas estendem o conceito de conjunto a uma análise sobre os seus elementos, às respetivas operações entre si (funções), assim como às propriedades que as interrelacionam.

Definição 11. Estrutura algébrica
Chama-se *estrutura algébrica* a uma $(n+1)$-upla ordenada constituída por um conjunto não vazio, $\mathbb{K}$, munido de n operações n-árias em $\mathbb{K}$, θ_1, θ_2, $\cdots$, θ_n com $n \geq 1$, ou alguma relação entre os seus elementos.

O objetivo mais importante no estudo de uma estrutura algébrica é a determinação das propriedades que a caracterizam.

A estrutura mais simples é designada por *grupoide*. À medida que as operações algébricas vão verificando um maior número de propriedades, a estrutura vai aumentando em complexidade, atingindo a estrutura mais complexa, designada de *corpo*. A caracterização dessas estruturas algébricas é apresentada nas secções seguintes.

1.2.1. Grupos

As estruturas algébricas que envolvem apenas um conjunto e uma operação binária nele definida são agrupadas na classe designada de *grupos* e classificadas de acordo com o diagrama apresentado na figura 1.2. Nesta secção, apresentam-se em pormenor estas estruturas, introduzindo-se os conceitos elementares necesssários à sua caracterização.

Figura 1.2.: Estruturas algébricas que envolvem apenas um conjunto e uma operação binária nele definida.

Seja $\mathbb{K}$ um conjunto não vazio e sobre o qual se aplica uma operação binária, θ, correspondendo a cada par de elementos de $\mathbb{K}$ um e um só elemento desse conjunto, tal como se apresenta no diagrama sagital da figura 1.3.

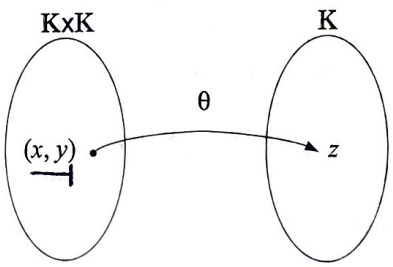


Figura 1.3.: Uma representação por um diagrama sagital de uma operação binária θ como aplicação de $\mathbb{K}^2$ em $\mathbb{K}$.

Nestas condições, diz-se que o conjunto $\mathbb{K}$ está dotado de uma estrutura algébrica, sendo esta representada pelo par ordenado formado pelo conjunto e operação, $(\mathbb{K}, \theta)$, a qual se vai classificar em diferentes subclasses de acordo com as propriedades verificadas pela operação.

Definição 12. Grupoide

Se um conjunto não vazio $\mathbb{K}$ é munido de uma operação binária θ, interna, expressa pela condição 1.7, então a estrutura algébrica $(\mathbb{K}, \theta)$ classifica-se como *grupoide*.

$$(\mathbb{K}, \theta) \text{ é grupoide} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{K} \text{ é não vazio} \\ \theta \text{ é uma lei de composição interna em } \mathbb{K} \end{cases} \tag{1.9}$$

Exemplo 4.

- A estrutura representada pelo par ordenado $(\mathbb{N}, +)$ e $(+)$ a soma habitual entre dois números naturais é grupoide, pois a soma de dois números naturais é sempre um natural.
- A estrutura representada pelo par ordenado $(\mathbb{N}, -)$, em que $(-)$ representa a subtração de números naturais, não é grupoide, pois a operação $x - y$ não é interna em $\mathbb{N}$, já que se $x \leq y$, então $x - y \notin \mathbb{N}$.
- A estrutura representada pelo par ordenado $(\mathbb{Z}, +)$ é um grupoide, pois a adição de inteiros relativos ainda é um inteiro relativo.
- A estrutura representada pelo par ordenado $(\mathbb{Z}_{\text{par}}, +)$ é um grupoide, pois a adição de inteiros relativos pares ainda é um inteiro relativo par.
- A estrutura representada pelo par ordenado $(\mathbb{Z}_{\text{ímpar}}, +)$ não é um grupoide, pois a adição de inteiros relativos ímpares não é um inteiro relativo ímpar.

Definição 13. Subgrupoide

Se as condições que um grupoide tem de verificar são também verificadas num subconjunto $\mathbb{K}_1$ contido em $\mathbb{K}$, então a estrutura $(\mathbb{K}_1, \theta)$ passa a designar-se por *subgrupoide*.

$$(\mathbb{K}_1, \theta) \text{ é subgrupoide de } (\mathbb{K}, \theta) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K} \\ (\mathbb{K}_1, \theta) \text{ é grupoide} \end{cases} \tag{1.10}$$

Exemplo 5.

A estrutura representada pelo par ordenado $(\mathbb{N}, +)$ é subgrupoide de $(\mathbb{Z}, +)$.

Definição 14. Grupoide comutativo (ou abeliano)

Se num grupoide $(\mathbb{K}, \theta)$, θ goza, ainda, da propriedade comutativa em $\mathbb{K}$, expressa pela condição 1.11

$$\forall x, y \in \mathbb{K},\ x \theta y = y \theta x \tag{1.11}$$

então a estrutura algébrica $(\mathbb{K}, \theta)$ passa a designar-se por *grupoide comutativo ou abeliano*.

Definição 15. Semigrupo

Se num grupoide $(\mathbb{K}, \theta)$, θ goza, ainda, da propriedade associativa, expressa pela condição 1.12

$$\forall x, y, z \in \mathbb{K},\ x \theta (y \theta z) = (x \theta y) \theta z \tag{1.12}$$

então a estrutura algébrica $(\mathbb{K}, \theta)$ designa-se por *semigrupo*.

$$(\mathbb{K}, \theta) \text{ é semigrupo} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{K} \text{ é não vazio} \\ \theta \text{ é uma lei de composição interna em } \mathbb{K} \\ \theta \text{ goza da propriedade associativa em } \mathbb{K} \end{cases} \tag{1.13}$$

Seguem-se alguns exemplos de estruturas algébricas em que as propriedades interna e associativa são válidas.

Exemplo 6.

- As estruturas $(\mathbb{N}, +)$ e $(\mathbb{Z}, \times)$, formadas pelos conjuntos de números naturais e inteiros relativos com as operações de adição e multiplicação usuais, respetivamente, são semigrupos.
- A estrutura $(S, *)$ é um semigrupo se S for um qualquer conjunto não vazio e se com $x, y \in S$ se tiver $x * y = x$.
- A estrutura (A, ∇) é um semigrupo se A é um conjunto não vazio de números reais e com $x, y \in A$ tal que $x \nabla y = \sup(x, y)$, onde a operação $\sup(x, y)$ seleciona para resultado o operando de maior valor.

Nos exemplos seguintes, a propriedade associativa não é válida, apesar de alguns poderem ser grupoides.

Exemplo 7.

- O conjunto $\mathbb{N}$, dos números naturais, munido da operação $x \wedge y = x^y$ de potenciação é um grupoide, mas não é um semigrupo, pois a operação $\wedge$ não é associativa em $\mathbb{N}$. Por exemplo

  $2 \wedge (3 \wedge 2) = 2^{(3^2)} = 2^9 = 512$ mas $(2 \wedge 3) \wedge 2 = \left(2^3\right)^2 = 8^2 = 64$.

- O conjunto $\mathbb{R}$, dos números reais, munido da operação $*$ definida pela média dos operandos, $x * y = \frac{x+y}{2}$, é um grupoide que não é um semigrupo, porque a operação de média assim definida não é associativa em $\mathbb{R}$. Por exemplo

  $2 * (6 * 10) = \frac{(2+\frac{(6+10)}{2})}{2} = 5$ mas $(2 * 6) * 10 = \frac{(\frac{(2+6)}{2}+10)}{2} = 7$.

- O conjunto P dos números pares, munido da operação $x \circledast y = x + y + 1$ não é um semigrupo, uma vez que $(P, \circledast)$ não é grupoide, pois $\circledast$ não é uma operação interna. Por exemplo

  $2 \circledast 2 = 5 \notin P$.

Definição 16. Semigrupo comutativo (ou abeliano)

Se num semigrupo $(\mathbb{K}, \theta)$, θ goza, ainda, da propriedade comutativa em $\mathbb{K}$, então a estrutura algébrica $(\mathbb{K}, \theta)$ passa a designar-se por *semigrupo comutativo* ou *abeliano*.

Definição 17. Monoide

Se num semigrupo $(\mathbb{K}, \theta)$, se verifica a condição 1.14

$$\exists u \in \mathbb{K} : \forall x \in \mathbb{K},\ x\theta u = u\theta x = x \tag{1.14}$$

a estrutura algébrica $(\mathbb{K}, \theta)$ é um *monoide* e u designa-se por *elemento neutro*.

$$(\mathbb{K}, \theta) \text{ é monoide} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{K} \text{ é não vazio} \\ \theta \text{ é uma lei de composição interna em } \mathbb{K} \\ \theta \text{ goza da propriedade associativa em } \mathbb{K} \\ \text{existência de elemento neutro, } u, \text{ em } \mathbb{K} \end{cases} \tag{1.15}$$

Definição 18. Monoide comutativo (ou abeliano)
Se no monoide $(\mathbb{K}, \theta)$, θ goza, ainda, da propriedade comutativa, então a estrutura algébrica $(\mathbb{K}, \theta)$ passa a designar-se por *monoide comutativo ou abeliano.*

Definição 19. Grupo
Se num monoide $(\mathbb{K}, \theta)$ se verifica a condição 1.16

$$\forall x \in \mathbb{K},\ \exists^1 x' \in \mathbb{K} :\ x\theta x' = x'\theta x = u \tag{1.16}$$

então a estrutura algébrica $(\mathbb{K}, \theta)$ passa a designar-se por *grupo* e x' designa-se por *oposto de x para θ* .

$$(\mathbb{K}, \theta) \text{ é grupo} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{K} \text{ é não vazio} \\ \theta \text{ é uma lei de composição interna em } \mathbb{K} \\ \theta \text{ goza da propriedade associativa em } \mathbb{K} \\ \text{existe elemento neutro, } u, \text{ em } \mathbb{K} \\ \text{todo o elemento de } \mathbb{K} \text{ possui elemento oposto para } \theta \end{cases} \tag{1.17}$$

Definição 20. Elemento regular, simétrico e inverso
Seja $(\mathbb{K}, \theta)$ um monoide. Os elementos de $\mathbb{K}$ que possuem elemento oposto designam-se por *elementos regulares,* pelo que num grupo todos os elementos são regulares. Na operação adição usual, o elemento oposto designa-se por *simétrico* e representa-se por $x' = -x$. Na operação de multiplicação usual designa-se por *inverso* e representa-se por $x' = x^{-1}$.

Definição 21. Grupo comutativo (ou abeliano)
Se no grupo $(\mathbb{K}, \theta)$, θ goza, ainda, da propriedade comutativa, então esta estrutura algébrica $(\mathbb{K}, \theta)$ passa a designar-se por *grupo comutativo ou abeliano.*

Definição 22. Grupo multiplicativo
Se num grupo a operação considerada é algum tipo de multiplicação, este passa a designar-se por *grupo multiplicativo.* Num grupo multiplicativo, denota-se a operação pelo sinal, $\otimes$.

Definição 23. Potência em grupo multiplicativo
Seja $(\mathbb{K}, \otimes)$ um grupo multiplicativo com elemento neutro u e elemento inverso de $x \in \mathbb{K}$, (x^{-1}). Designa-se por *potência em grupo multiplicativo* e representa-se por x^n à operação multiplicação iterada n vezes

$$x^n = \underbrace{x \otimes x \otimes \cdots \otimes x}_{n \text{ vezes}} \tag{1.18}$$

A potência em grupo multiplicativo obedece às propriedades listadas na tabela 1.1.

Tabela 1.1.: Propriedades da potência em grupo multiplicativo.

	Propriedade
P1	$x^0 = u$, $x^1 = x$, $x^2 = x \otimes x$ e, indutivamente, $x^n = x \otimes x^{n-1} \forall n \in \mathbb{N}$
P2	$x^{-n} = \left(x^{-1}\right)^n$
P3	$x^n \otimes x^m = x^{n+m}$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$

Definição 24. Grupo aditivo

Se num grupo a operação considerada é algum tipo de adição, este passa a designar-se por *grupo aditivo*. Num grupo aditivo, denota-se a operação pelo sinal, $\oplus$.

Nos grupos, as operações $\oplus$ e $\otimes$ são simplificadamente designadas por *adição* e *multiplicação*, respetivamente, representando-se simbolicamente pelos operadores $+$ e $\times$, desde que não haja risco de confusão com as operações usuais.

Definição 25. Múltiplo de um elemento em grupo aditivo

Seja $(\mathbb{K}, +)$ um grupo aditivo com elemento neutro 0 e elemento simétrico de $x \in \mathbb{K}$, $(-x)$. Designa-se por *múltiplo de um elemento em grupo aditivo* e representa-se por $n \times x$ à operação soma iterada n vezes

$$n \times x = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ vezes}} \tag{1.19}$$

O múltiplo de um elemento em grupo aditivo obedece às propriedades apresentadas na tabela 1.2.

Tabela 1.2.: Múltiplo de um elemento em grupo aditivo.

	Propriedade
P1	$0 \times x = 0$
P2	$1 \times x = x$
P3	$n \times x = x + (n-1) \times x$
P4	$(-n) \times x = n \times (-x)$
P5	$(n \times x) + (m \times x) = (m+n) \times x$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$

Exemplo 8.

- O conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros relativos com a adição usual é o *grupo aditivo dos inteiros relativos* e exprime-se pelo par ordenado $(\mathbb{Z}, +)$.
- O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais com a adição usual é o *grupo aditivo dos reais* e exprime-se pelo par ordenado $(\mathbb{R}, +)$.

Definição 26. Ordem de um grupo
Chama-se *ordem de um grupo*, $\text{ord}\,(\mathbb{K}, \theta)$, à sua cardinalidade.

Os grupos podem ter ordem (cardinalidade) finita ou infinita. Para simplificar a análise de um determinado grupo, este pode ser subdividido em vários subgrupos com menor cardinalidade que o grupo que lhes deu origem.

Definição 27. Subgrupo
Um conjunto $\mathbb{K}_1$ é subgrupo de $\mathbb{K}$, se respeitar a seguinte relação

$$(\mathbb{K}_1, \theta) \text{ é subgrupo de } (\mathbb{K}, \theta) \Leftrightarrow (\mathbb{K}_1, \theta) \leq (\mathbb{K}, \theta) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K} \\ (\mathbb{K}_1, \theta) \text{ é grupo} \end{cases} \tag{1.20}$$

A ordem do grupo $(\mathbb{K}, \theta)$ relaciona-se com a ordem de um dos seus possíveis subgrupos $(\mathbb{K}_n, \theta)$, de acordo com o seguinte teorema, dito Teorema de Lagrange.

Teorema 1. (*Teorema de Lagrange*) *Se* $(\mathbb{K}_n, \theta)$ *é um subgrupo de* $(\mathbb{K}, \theta)$, *então* $\text{ord}\,(\mathbb{K}, \theta)$ *é múltipla de* $\text{ord}\,(\mathbb{K}_n, \theta)$.

Definição 28. Ordem de um elemento de um grupo
Chama-se *ordem de um elemento* x *do grupo* $(\mathbb{K}, \theta)$, e representa-se por $\text{ord}(x)$, ao menor número inteiro a que se tem de elevar x de modo a obter-se o elemento neutro do grupo, isto é

$$\text{ord}(x) : x^{\text{ord}(x)} = u, \forall x \in \mathbb{K} \tag{1.21}$$

onde u designa o elemento neutro do grupo e $\text{ord}(x)$ representa a ordem do elemento.

A ordem de cada elemento do grupo pode ser relacionada com a ordem do próprio grupo, de acordo com o seguinte teorema

Teorema 2. *Se* x *é um elemento do grupo* $(\mathbb{K}, \theta)$, *então a* $\text{ord}(x)$ *é divisor de* $\text{ord}\,(\mathbb{K}, \theta)$.

Para melhor se entender o conceito introduzido pelos teoremas 1 e 2, veja-se o exercício resolvido 4, na página 31. Este exercício serve também para apresentar o seguinte teorema que envolve grupos e números primos

Teorema 3. *Os elementos do conjunto* $S = \{1, 2, 3, ..., p-1\}$ *formam um grupo comutativo de ordem* $p-1$ *para a multiplicação módulo* p *se, e só se,* p *for um número primo.*

1.2.2. Anéis e corpos

Na secção anterior, estudaram-se as estruturas algébricas que envolvem apenas um conjunto e uma operação definida sobre os elementos desse conjunto. Para além dos grupos apresentados na secção prévia, existem outras estruturas algébricas de maior complexidade, por envolverem mais que uma operação. São de especial relevância as estruturas que envolvem duas operações definidas sobre os elementos de um conjunto, e estas estruturas assentam sobre a estrutura de grupo estudada na secção anterior. Tal como dizia Hermann Hankel[1]

"Na maior parte das ciências, uma geração põe abaixo o que a outra construiu, e o que a outra estabeleceu a outra desfaz. Somente na Matemática é que cada geração constrói um novo andar sobre a antiga estrutura".

As estruturas algébricas formadas por um conjunto e duas operações definidas sobre os seus elementos agrupam-se na classe dos *corpos* e são caracterizadas segundo o organigrama apresentado na figura 1.4.

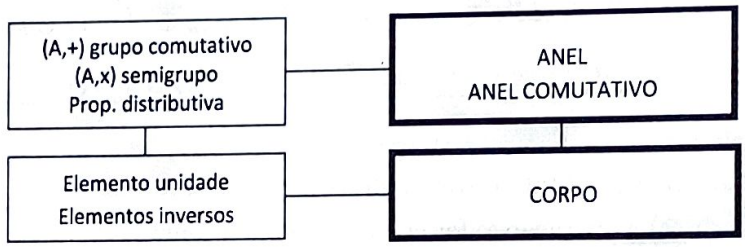


Figura 1.4.: Estruturas algébricas formadas por um conjunto e duas operações definidas sobre os seus elementos.

Definição 29. Anel

Seja $\mathbb{K}$ um conjunto não vazio sobre o qual são definidas as operações $\oplus$ e $\otimes$. O terno ordenado $(\mathbb{K}, \oplus, \otimes)$, formado pelo conjunto $\mathbb{K}$ e pelas duas operações, designa a estrutura algébrica *anel* se verificar as condições 1.22, e detalhadas na tabela 1.3.

$$(\mathbb{K}, \oplus, \otimes) \text{ é anel } \Leftrightarrow \begin{cases} (\mathbb{K}, \oplus) \text{ é grupo comutativo} \\ (\mathbb{K}, \otimes) \text{ é semigrupo} \\ \otimes \text{ goza da propriedade distributiva} \\ \quad \text{em relação à } \oplus \text{ em } \mathbb{K} \end{cases} \tag{1.22}$$

Nos anéis, as operações $\oplus$ e $\otimes$ são simplificadamente designadas por *adição* e *multiplicação*, respetivamente, e representadas simbolicamente pelos operadores $+$ e $\times$, desde que não haja risco de confusão com as operações usuais.

[1] Hermann Hankel (1839-1873) foi um matemático alemão que resolveu o problema do produto de números negativos e estudou Álgebra Linear. Em particular, desenvolveu a "Teoria das extensões", essencial no estudo da natureza de espaços.

Tabela 1.3.: Condições para a estrutura $(\mathbb{K}, \oplus, \otimes)$ ser um anel.

Estrutura	Propriedade
$(\mathbb{K}, \oplus)$ é grupo comutativo	$\forall x, y \in \mathbb{K}\, \exists^1 z \in \mathbb{K} : x \oplus y = z$
	$\forall x, y, z \in \mathbb{K},\ x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$
	$\exists u \in \mathbb{K} : \forall x \in \mathbb{K},\ x \oplus u = u \oplus x = x$
	$\forall x \in \mathbb{K},\ \exists^1 x' \in \mathbb{K} : x \oplus x' = x' \oplus x = u$
	$\forall x, y \in \mathbb{K},\ x \oplus y = y \oplus x$
$(\mathbb{K}, \otimes)$ é semigrupo	$\forall x, y \in \mathbb{K}\, \exists^1 z \in \mathbb{K} : x \otimes y = z$
	$\forall x, y, z \in \mathbb{K},\ x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$
$\otimes$ é distributiva em relação a $\oplus$	$\forall x, y, z \in \mathbb{K},\ x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$
	$\forall x, y, z \in \mathbb{K},\ (x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$

Definição 30. Anel comutativo (ou abeliano)

Se no anel $(\mathbb{K}, \oplus, \otimes)$ a operação $\otimes$ for comutativa em $\mathbb{K}$, então esta estrutura algébrica passa a designar-se por *anel comutativo ou abeliano.*

Definição 31. Zero do anel

Na primeira operação do anel, $\oplus$, o elemento neutro designa-se por *zero do anel* e representa-se por **0**. Já os elementos opostos para esta operação são designados por *elementos simétricos do anel.*

Definição 32. Unidade do anel

Na segunda operação do anel, $\otimes$, o elemento neutro, se existir, designa-se por *unidade do anel* e representa-se por **1**. Já os elementos opostos para esta operação, se existirem, são designados por *elementos inversos.*

Definição 33. Elementos singulares e regulares de um anel

Os elementos de um anel que não têm inverso designam-se como *elementos singulares do anel,* enquanto que todos aqueles que possuem inverso são designados por *elementos regulares* ou *elementos invertíveis do anel.*

Assim, $(\mathbb{K}, \oplus, \otimes)$ é um anel com elemento zero, **0**, com elemento simétrico de $x \in \mathbb{K}$, $(-x)$, e com a operação $\oslash$ que verifica as propriedades listadas na tabela 1.4.

Tabela 1.4.: Elementos singulares e regulares de um anel.

	Propriedade
P1	$\forall x \in \mathbb{K} : x \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0} \otimes x = \mathbf{0}$
P2	$\forall x, y \in \mathbb{K} : (-x) \otimes y = -(x \otimes y)$
P3	$\forall x, y \in \mathbb{K} : x \otimes (-y) = -(x \otimes y)$
P4	$\forall x, y \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N} : (nx) \otimes y = n(x \otimes y)$
P5	$\forall x, y \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N} : x \otimes (ny) = n(x \otimes y)$

Definição 34. Divisores de zero de um anel

Seja $a \in \mathbb{K}$ um elemento não nulo de um anel. Diz-se que a é um *divisor de zero* se

$$\exists x \in \mathbb{K} : x \neq \mathbf{0} \wedge (a \otimes x = \mathbf{0} \vee x \otimes a = \mathbf{0}) \tag{1.23}$$

Da condição 1.23, conclui-se que são divisores de zero todos aqueles elementos que, multiplicados por outro elemento diferente de zero, têm como produto o zero do anel.

Definição 35. Corpo

Se o anel comutativo possui, ainda, elemento unidade e inverso para todos os seus elementos exceto o zero do anel, então a estrutura algébrica $(\mathbb{K}, \oplus, \otimes)$ passa a designar–se por *corpo*.

$$(\mathbb{K}, \oplus, \otimes) \text{ é corpo} \Leftrightarrow \begin{cases} (\mathbb{K}, \oplus) \text{ é um grupo comutativo} \\ (\mathbb{K} \setminus \{\mathbf{0}\}, \otimes) \text{ é um grupo comutativo} \\ \otimes \text{ é distributiva em relação à } \oplus \end{cases} \tag{1.24}$$

onde $\mathbf{0}$ designa o elemento neutro do grupo $(\mathbb{K}, \oplus)$ e zero do anel.

Definição 36. Elemento inverso e elemento simétrico

Sejam x e y dois elementos de $\mathbb{K}$. O corpo $(\mathbb{K}, \oplus, \otimes)$ verifica as propriedades da tabela 1.5. O elemento representado por a^{-1} é o *inverso* de a e o sinal $(-)$ representa o *simétrico* do valor ao qual está associado.

Tabela 1.5.: Propriedades de um corpo.

Designação	Propriedade
anulamento do produto	$x \otimes y = \mathbf{0} \Leftrightarrow x = \mathbf{0} \vee y = \mathbf{0}$
unicidade da solução	$(a \otimes x) \oplus b = 0 \Leftrightarrow x = -\left(\left(a^{-1}\right) \otimes b\right), a \neq \mathbf{0}$

Regra geral, quando não existe qualquer dúvida de que as operações na estrutura algébrica corpo são as soma e multiplicação formais, é usual simplificar-se a sua designação, passando esta a adotar o nome do seu conjunto de suporte. Assim, por exemplo, o corpo $(\mathbb{R}, +, \times)$ passa a ser referido simplesmente por corpo $\mathbb{R}$ (o corpo dos reais). Um outro corpo muito importante é o corpo dos números complexos que pela sua importância em várias áreas da física e da engenharia, nomeadamente na engenharia eletrotécnica, se apresenta de seguida.

1.3. O corpo dos números complexos

Considere-se o problema de determinação das raízes reais da equação $x^n = a$, sendo $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$. As soluções desta equação introduzem o conceito de raiz enésima de a (ou raiz de índice n de a), $\sqrt[n]{a}$, definindo-a como sendo um número x que verifica as seguintes condições

- Para n par, o domínio do radicando é dado por $\{a \in \mathbb{R}_0^+ : x^n = a\}$
  - Se $a > 0$, $x^n = a$ tem duas soluções: $x = -\sqrt[n]{a} \vee x = \sqrt[n]{a}$.
  - Se $a = 0$, $x^n = a$ tem apenas a solução $x = 0$.
  - Se $a < 0$, $x^n = a$ não tem solução em $\mathbb{R}$, pois $x = \sqrt[n]{a}$ não existe.
- Para n ímpar, o domínio do radicando é dado por $\{a \in \mathbb{R} : x^n = a\}$, tendo a equação $x^n = a$ apenas uma solução real dada por $x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$

Exemplo 9.

- A equação $x^2 = 4$ tem duas soluções reais $x = -2 \vee x = 2$.
- A equação $x^2 = 0$ tem uma só solução que é raiz dupla $x = 0$.
- A equação $x^2 = -4$ é uma equação impossível em $\mathbb{R}$.
- A equação $x^5 = -1$ tem uma só solução real $x = -1$.

A dificuldade em resolver em $\mathbb{R}$ este tipo de equações para valores negativos de a quando n é par, mostra que o corpo real é insuficiente nestas circunstâncias, pelo que é necessário ampliar o corpo dos reais com um novo corpo, designado de corpo complexo, onde estas equações serão sempre possíveis. Assim, considera-se o corpo dos números complexos, $\mathbb{C}$, como uma ampliação do corpo $\mathbb{R}$, no qual a equação $x^{2n} = a, \forall a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ tem sempre solução.

Seja a equação $x^2 + 1 = 0$. Esta equação é impossível em $\mathbb{R}$, pois a solução é dada por

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 0 \\ x^2 &= -1 \\ x &= \pm\sqrt{-1} \end{aligned} \tag{1.25}$$

Considere-se agora que a $\sqrt{-1}$ se associa uma nova grandeza, i^2, designada de unidade imaginária, tal que $i = \sqrt{-1}$.

Nesta circunstância, a equação anterior já teria as soluções, $x = -i \vee x = i$. Com base nesta nova grandeza, torna-se possível resolver qualquer equação do tipo $x^n + a = 0$, pois quando n é par, a solução tem raízes de índice n com radicando negativo, as quais se podem considerar como $x = \pm \sqrt[n]{-a} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[n]{a}\sqrt{-1} = \pm i\sqrt{a}$.

Exemplo 10.

As raízes da equação $k^2 - 6k + 25 = 0$, definida em $\mathbb{C}$, são dadas por

$$\begin{aligned} k &= \frac{6 \pm \sqrt{36-100}}{3} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{-64}}{3} \\ &= 2 - 8i \vee k = 2 + 8i \end{aligned}$$

1.3.1. Representação algébrica de um número complexo

Definição 37. Número complexo

Um *número complexo*, aqui notado pelo símbolo z, representa-se na forma algébrica por $z = x + yi$, onde x é a parte real de z e representa-se por $x = \mathrm{Re}(z)$, yi é a parte imaginária de z. O coeficiente da parte imaginária sendo y, representando-se por $y = \mathrm{Im}\,(z)$, onde i é a unidade imaginária, isto é, $i = \sqrt{-1}$.

Definição 38. Número imaginário puro

Da definição $z = x + yi$ para a forma algébrica dos números complexos, resulta que um número real é aquele que possui parte imaginária nula, $y = 0$, isto é, $z = x$; se $x = 0 \wedge y \neq 0$, isto é, se $z = yi$, então o complexo tem parte real nula e designa-se por *imaginário puro.*

Definição 39. Conjugado de um número complexo

O número complexo $\overline{z}$ diz-se *conjugado do complexo* $z = x + yi$ se tiver a mesma parte real mas simétrico o coeficiente da parte imaginária, isto é, $\overline{z} = x - yi$.

Exemplo 11.

Se $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = -2i$, tem-se que z_2 é um número imaginário puro e z_1 não.
O conjugado do complexo z_1, é $\overline{z_1} = 2 - 3i$ e o conjugado do complexo z_2, é $\overline{z_2} = 2i$.

Os números complexos conjugados verificam as propriedades apresentadas na tabela 1.6.

[2] Em eletrotecnia, é habitual usar-se i para corrente elétrica e j para a unidade imaginária.

Tabela 1.6.: Propriedades dos conjugados.

Propriedade	
P1	$\overline{\overline{z}} = z$
P2	$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$
P3	$\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$
P4	$z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,(z) = 2x$
P5	$z - \overline{z} = 2\,\mathrm{Im}\,(z)\,i = 2yi$
P7	$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$

Definição 40. Módulo de um número complexo
Chama-se módulo de um número complexo $z = x + yi$ ao número real não negativo ρ obtido por

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.26}$$

O módulo dos números complexos verifica as propriedades apresentadas na tabela 1.7.

Tabela 1.7.: Propriedades do módulo de números complexos.

Propriedade	Condição
P1	$\forall z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i, \lvert z_1 + z_2\rvert \leq \lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert$
P2	$\forall z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i, \lvert z_1 - z_2\rvert \geq \lvert z_1\rvert - \lvert z_2\rvert$
P4	$\forall z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i, \lvert z_1 z_2\rvert = \lvert z_1\rvert . \lvert z_2\rvert$
P5	$\forall z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i, \left\lvert \frac{z_1}{z_2}\right\rvert = \frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}$
P6	$\lvert z\rvert^2 = z\overline{z} = x^2 + y^2$

Exemplo 12.

O módulo do complexo $z = 2 - 3i$ é $\rho = |z| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$.

Em $\mathbb{C}$ não é possível estabelecer uma relação de ordem, pelo que não se pode dizer que um número complexo é maior ou menor do que outro número complexo, a não ser em módulo, pois o módulo de um número complexo é sempre um número real e em $\mathbb{R}$ a relação de ondem está definida. Contudo, pode falar-se em números complexos iguais e diferentes.

Definição 41. Igualdade de números complexos
Diz-se que dois números complexos, $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$, são iguais se, e só se,

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \tag{1.27}$$

Definição 42. Simétrico de um número complexo
O número complexo $-z = -x - yi$ diz-se *simétrico* de z.

1.3.2. Representação de um número complexo no plano D'Argand

Os números complexos não são representáveis sobre uma reta tal como acontece com os números reais, na medida em que a cada ponto da reta corresponde um e um só número real e a cada número real corresponde uma infinidade de números complexos $(x + i, x + i\sqrt{3}, \ldots)$. Esta dificuldade é ultrapassada com a consideração de duas retas ortogonais, designadas por eixos (o *eixo real* associado às abcissas e o *eixo imaginário* associado às ordenadas), pelo que cada número complexo $z = x + yi$ pode ser representado pelo par ordenado, $(x, y) : x, y \in \mathbb{R}$, sendo interpretado geometricamente como um ponto do *plano complexo* ou *plano D'Argand*, no qual existe um sistema de coordenadas cartesianas formado por dois eixos, tal como se indica na figura 1.5. Neste contexto, diz-se que um número complexo é um número a duas dimensões.

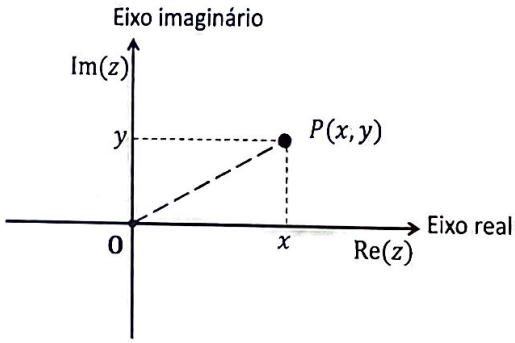


Figura 1.5.: Representação do número complexo z no plano complexo ou plano D'Argand. O ponto P designa-se por *afixo de* z e caracteriza-se pelas suas coordenadas cartesianas (x, y).

Na figura 1.6 representam-se os números complexos $z_1 = 2+i$, $z_2 = 2-i$, $z_3 = -2-i$ e $z_4 = -2+i$, onde é possivel ilustrar as simetrias relativamente ao eixo real e ao eixo imaginário que ocorrem entre um complexo, o seu conjugado, o seu simétrico e o simétrico do seu conjugado e verificar que há correspondência biunívoca entre números complexos e pontos do plano. Os afixos $z_5 = 1$ e $z_6 = i$ são exemplos de um número real e de um imaginário puro.

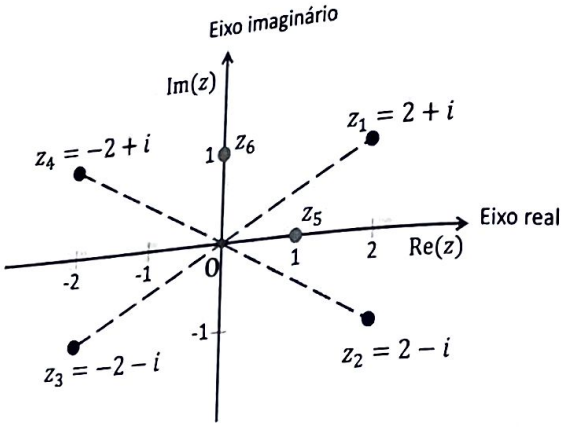


Figura 1.6.: Os afixos do conjugado, simétrico e simétrico do conjugado do número complexo $z = 2 + i$.

1.3.3. Operações algébricas com números complexos

Definição 43. Adição de dois números complexos

A operação *adição* de dois números complexos, $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$, é uma operação interna em $\mathbb{C}$, definida por

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\, i \tag{1.28}$$

Exemplo 13.

A soma dos números complexos $z_1 = 2 + i$ e $z_2 = -1 + 2i$ é
$z + z_2 = (2 + i) + (-1 + 2i) = 1 + 3i$ e a sua representação gráfica é

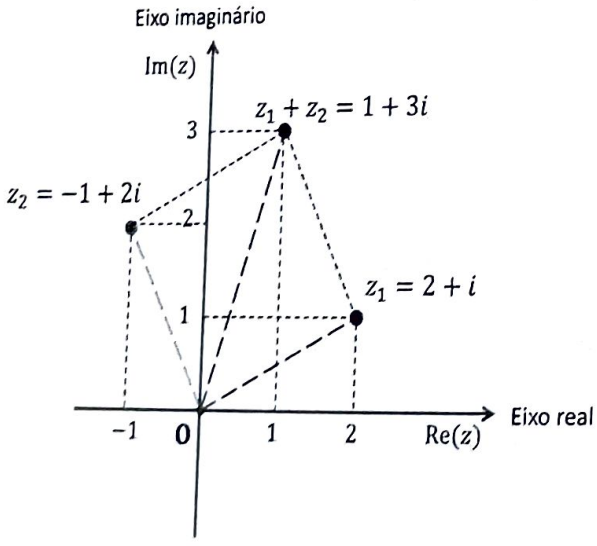


Figura 1.7.: Representação gráfica da soma algébrica de dois complexos.

A soma algébrica de dois complexos pode ser estendida para se obter a soma de vários números complexos. A título de exemplo, segue-se um com quatro complexos e uma alternativa gráfica para a obtenção da sua soma.

Exemplo 14.

A soma dos quatro números complexos

$z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = -1 + 2i$, $z_3 = 2$ e $z_4 = 1 - 3i$, tem por resultado

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 + z_4 &= (2 + 2i) + (-1 + 2i) + (2 + 0i) + (1 - 3i) \\ &= (2 - 1 + 2 + 1) + (2 + 2 + 0 - 3)i \\ &= 4 + i \end{aligned}$$

e a sua representação grafica é

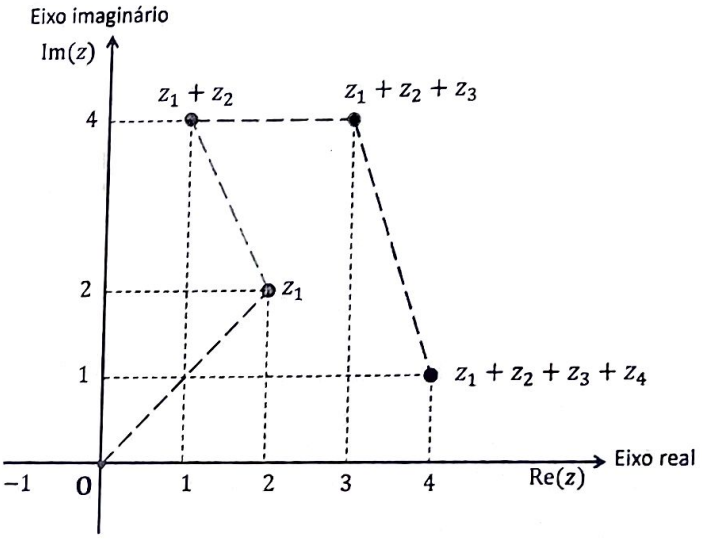


Figura 1.8.: Representação gráfica da soma algébrica de quatro complexos.

Definição 44. Multiplicação de dois números complexos

A operação *multiplicação* de dois números complexos, $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$, é uma operação interna em $\mathbb{C}$, definida por

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)\, i \tag{1.29}$$

a qual se obtém a partir das propriedades comutativa, associativa e distributiva de números reais, substituindo i^2 por -1.

A estrutura $(\mathbb{C}, +, \times)$ com a operação de adição e multiplicação definidas por 1.28 e 1.29, respetivamente, é um corpo. A verificação das propriedades listadas na tabela 1.8 fica como exercício para o leitor.

Exemplo 15.

O produto dos complexos $z_1 = 2+i$ e $z_2 = -1+2i$ é obtido por aplicação da propriedade distributiva

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (2+i)(-1+2i) \\ &= -2+4i-i+2i^2 \\ &= -4+3i \end{aligned}$$

e a sua representação grafica é

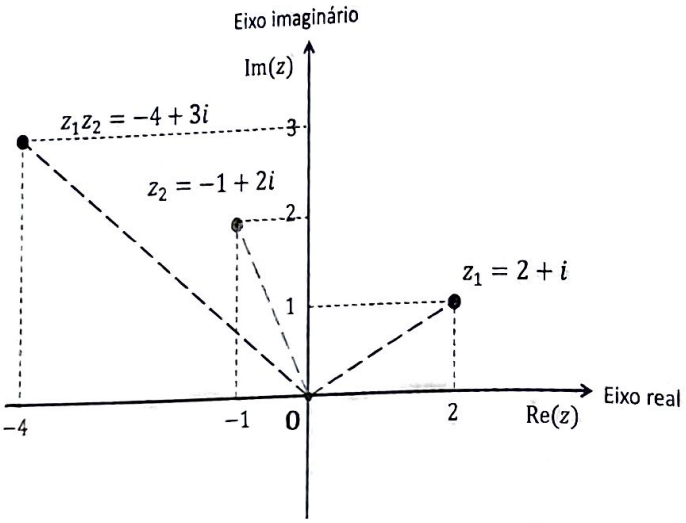


Figura 1.9.: Representação gráfica do produto de dois complexos.

Definição 45. Divisão de dois números complexos

A operação *divisão* de dois números complexos, $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$, é uma operação interna em $\mathbb{C}$, obtida pela expressão

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z}_2}{z_2 \overline{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i \tag{1.30}$$

Definição 46. Inverso de um número complexo

O *inverso de um complexo* z, definido pela última propriedade da tabela e cujo resultado é determinado a partir da definição de igualdade de complexos e do inverso de um elemento de um corpo, pode ser usado para determinar a divisão de dois complexos.

Em alternativa, utiliza-se frequentemente a multiplicação pelo conjugado do complexo em denominador, pois, dessa forma, não é necessário recorrer a outras propriedades que aquelas usadas entre reais.

Na tabela 1.8, apresentam-se algumas propriedades das operações algébricas em $\mathbb{C}$.

Tabela 1.8.: Propriedades das operações algébricas em $\mathbb{C}$.

Propriedade	Condição
Comutatividade da adição	$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
Associatividade da adição	$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
Elemento neutro da adição	$\exists u \in \mathbb{C} : \forall z \in \mathbb{C}, u + z = z + u = z \Leftrightarrow u = 0 + 0i$
Simétrico	$\forall z \in \mathbb{C}, \exists z' \in \mathbb{C} : z + z' = z' + z = u \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow z' = -z = -x - yi$
Comutatividade da multiplicação	$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_1 z_2 = z_2 z_1$
Associatividade da multiplicação	$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$
Distributividade da multiplicação em relação à adição	$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, \begin{cases} (z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3 \\ z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \end{cases}$
Elemento unidade	$\exists \mathbf{1} \in \mathbb{C} : \forall z \in \mathbb{C}, \mathbf{1}\, z = z\, \mathbf{1} = z \Leftrightarrow \mathbf{1} = 1 + 0i$
Inverso	$\forall z \neq 0 \in \mathbb{C}, \exists z^* \in \mathbb{C} : z\, z^* = z^* z = \mathbf{1} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow z^* = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{-y}{x^2+y^2} i$

Exemplo 16.

A obtenção de $z_4 = \left(\frac{z_1}{z_2} + z_2 z_3 + \frac{1}{z_3}\right)$, sendo $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 3 - 4i$ e $z_3 = 1 + i$, é obtida respeitando as regras habituais de prioridade de aplicação das operações algébricas

$$\begin{aligned}
\tfrac{z_1}{z_2} + z_2 z_3 + \tfrac{1}{z_3} &= \tfrac{2+3i}{3-4i} + (3 - 4i)(1 + i) + \tfrac{1}{(1+i)} \\
&= \tfrac{(2+3i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} + \left(3 \times 1 - 4i \times 1 + 3i - 4i^2\right) + \tfrac{1+0}{1+1} + \tfrac{0-1}{1+1} i \\
&= \tfrac{2\times3+3i\times3+2\times4i+3i\times4i}{3^2-(4i)^2} + \left(3 \times 1 - 4i \times 1 + 3i - 4i^2\right) + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} i \\
&= \tfrac{(6-12)+(9+8)i}{9+16} + (3 + 4) + (-4 + 3)\, i + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} i \\
&= -\tfrac{6}{25} + \tfrac{17}{25} i + 7 - i + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} i \\
&= \tfrac{363}{50} - \tfrac{41}{50} i
\end{aligned}$$

1.3.4. Representação trigonométrica de um número complexo

A representação do complexo $z = x + yi$, ilustrado na figura 1.10, sugere outras formas de caracterização alternativas à forma cartesiana (x, y), podendo ao afixo $z \neq 0$ corresponder o ponto P de coordenadas polares (ρ, θ).

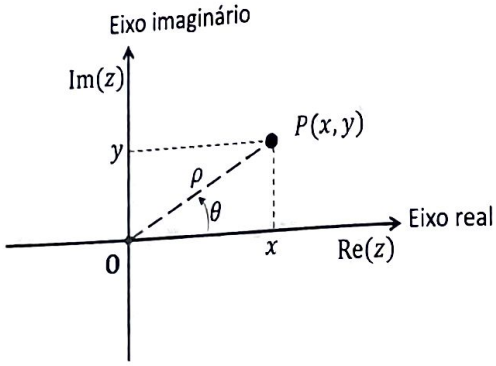


Figura 1.10.: Representação do número complexo z no plano complexo ou plano D'Argand. O ponto P designa-se por *afixo de* z e caracteriza-se pelas suas coordenadas polares (ρ, θ).

A coordenada ρ corresponde à distância do afixo à origem; a coordenada θ, designada por *argumento de um número complexo*, corresponde ao ângulo entre o semieixo positivo das abcissas e a semireta $\dot{O}P$

$$\begin{cases} \theta = \arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases} \tag{1.31}$$

Obviamente, existe uma infinidade de soluções para o argumento, diferindo entre si de $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. No plano D'Argand, as partes real e complexa de um número complexo $z = x + yi$, bem como o seu módulo e argumento, representam-se como se indica na figura 1.11, na qual também se ilustram os afixos do seu conjugado, simétrico e simétrico do conjugado.

Definição 47. Argumento positivo mínimo e argumento principal

Se o argumento for limitado ao intervalo $[0\, 2\pi[$, chama-se *argumento positivo mínimo*, sendo limitado ao intervalo $]-\pi, \pi]$, designa-se por *argumento principal.*

Um dado complexo indicado na *forma algébrica ou retangular*, $z = x + yi$, pode escrever-se na *forma trigonométrica* através das igualdades 1.31, resultando em

$$z = \rho\cos(\theta) + i\,\rho\sin(\theta) = \rho\left[\cos(\theta) + \sin(\theta)\, i\right] \tag{1.32}$$

servindo este último resultado para definir a *forma trigonométrica* (ou *polar*)

$$z = \rho\,\mathrm{cis}(\theta) \tag{1.33}$$

onde "cis(θ)" é uma abreviatura que agrega a função $\cos(\theta)$ com a unidade imaginária i e a função $\sin(\theta)$.

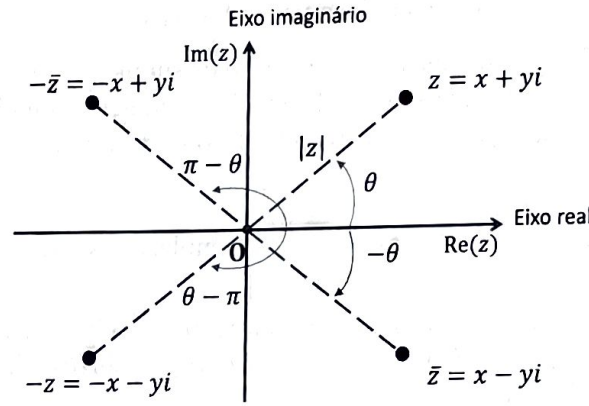


Figura 1.11.: Elementos que caracterizam um complexo $z = x + yi$.

Exemplo 17.

A representação do número complexo $z = -\sqrt{3} - i$ na forma trigonométrica é obtida considerando

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2 \\ \cos(\theta) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

Sendo $\cos(\theta)$ e $\sin(\theta)$ ambos negativos, θ está no 3º quadrante. Assim, o único arco θ tal que $0 < \theta < 2\pi$ que é solução do sistema é $\theta = \frac{7}{6}\pi = 210^{\circ}$.
Logo, a representação trigonométrica de $z = -\sqrt{3} - i$ é dada por

$$z = 2\left[\cos\left(\tfrac{7}{6}\pi\right) + \sin\left(\tfrac{7}{6}\pi\right) i\right], \text{ isto é } z = 2\text{cis}\left(\tfrac{7}{6}\pi\right),$$

em que o argumento se diz argumento positivo mínimo.
Subtraindo 2π, obtém-se o argumento principal, passando o número complexo z a ser representado por

$$z = 2\text{cis}\left(-\tfrac{5}{6}\pi\right).$$

1.3.5. Operações algébricas com números complexos escritos na forma trigonométrica

Definição 48. Adição de dois números complexos escritos na forma trigonométrica
A operação *adição de dois números complexos escritos na forma trigonométrica*, $z_1 = \rho_1[\cos(\theta_1) + \sin(\theta_1) i]$ e $z_2 = \rho_2[\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2) i]$, é uma operação interna em $\mathbb{C}$, definida por

$$z_1 + z_2 = (\rho_1 \cos(\theta_1) + \rho_2 \cos(\theta_2)) + (\rho_1 \sin(\theta_1) + \rho_2 \sin(\theta_2))\, i \tag{1.34}$$

A equação 1.34 resulta numa forma não trigonométrica, pelo que sempre que se pretender somar analiticamente dois números complexos representados na forma trigonométrica, ter-se-á que os reescrever na sua forma algébrica, proceder, então, à adição e só depois reescrever o número complexo na forma trigonométrica.

As restantes operações algébricas são, todavia, mais simples de efetuar na forma trigonométrica. A extração de raízes (de índice real) de números complexos é, também, mais fácil com a consideração do número complexo escrito na sua forma trigonométrica.

Definição 49. Multiplicação de dois números complexos escritos na forma trigonométrica

A operação *multiplicação de dois números complexos escritos na forma trigonométrica*, $z_1 = \rho_1 [\cos(\theta_1) + \sin(\theta_1) i]$ e $z_2 = \rho_2 [\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2) i]$, é uma operação interna em $\mathbb{C}$, definida por

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + \sin(\theta_1 + \theta_2)\ i] \tag{1.35}$$

Definição 50. Divisão de dois números complexos escritos na forma trigonométrica

A operação *divisão de dois números complexos escritos na forma trigonométrica*, $z_1 = \rho_1 [\cos(\theta_1) + \sin(\theta_1) i]$ e $z_2 = \rho_2 [\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2) i]$, é uma operação interna em $\mathbb{C}$, obtida pela expressão

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 [\cos(\theta_1) + \sin(\theta_1) i]}{\rho_2 [\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2) i]} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + \sin(\theta_1 - \theta_2) i] \tag{1.36}$$

Definição 51. Potenciação de expoente inteiro de um número complexo escrito na forma trigonométrica

A operação *potenciação de expoente inteiro de um número complexo escrito na forma trigonométrica*, $z = \rho [\cos(\theta) + \sin(\theta) i]$, é uma operação interna em $\mathbb{C}$, obtida pela expressão

$$z^n = [\rho [\cos(\theta) + \sin(\theta)\ i]]^n = \rho^n [\cos(n\theta) + \sin(n\theta) i] \tag{1.37}$$

1.3.6. Funções complexas de variável real

Considere-se que o número complexo anteriormente apresentado na forma $z = x + yi$ passa a ser representado por $z = a + bi$.

Uma função complexa de uma variável real é uma função da forma

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)\ i \tag{1.38}$$

onde f_1 e f_2 são funções reais de variável real designadas, respetivamente, por parte real e parte imaginária da função f, isto é

$$\begin{cases} f_1 &= \mathrm{Re}\,(f) \\ f_2 &= \mathrm{Im}\,(f) \end{cases} \tag{1.39}$$

Duas funções complexas (de variável real) dizem-se iguais se, e só se, as respetivas parte real e parte imaginária são iguais.

A derivada de uma função complexa de uma variável real é dada por

$$\frac{df}{dx} = \frac{df_1}{dx} + \frac{df_2}{dx}\, i \tag{1.40}$$

A função exponencial complexa é dada por

$$e^{zx} = e^{(a+bi)x} = e^{ax}\left(\cos(bx) + i\,\sin(bx)\right) \tag{1.41}$$

Contudo, atendendo a 1.41, um número complexo imaginário puro é representado por

$$e^{(bx)i} = \cos(bx) + \sin(bx)\, i \tag{1.42}$$

1.3.7. Representação exponencial de um número complexo. Fórmulas de Euler e de Moivre

A radiciação de números complexos não é possivel de efetuar nas formas algébrica e trigonométrica. Atendendo a 1.42 e fazendo $\theta = bx$, obtém-se a chamada equação de Euler, que relaciona a expressão polar $\mathrm{cis}(\theta)$ com a função exponencial através da igualdade 1.43

$$e^{\theta i} = \cos(\theta) + \sin(\theta)\, i \tag{1.43}$$

o que permite representar o complexo na *forma exponencial*[3], cuja expressão é dada por

$$z = \rho e^{\theta i} \tag{1.44}$$

De 1.44 deduz-se que[4]

$$e^{-\theta i} = \cos(-\theta) + \sin(-\theta)\, i = \cos(\theta) - \sin(\theta)\, i \tag{1.45}$$

---

[3]Em eletrotecnia, é utilizada frequentemente a forma angular, $z = \rho\angle\theta$, para representar um fasor de amplitude ρ e fase θ.

[4]Note-se que, considerando a equação 1.43, se tem:

- para $\theta = \pi$, $e^{\pi i} = \cos(\pi) + i\,\sin(\pi) = -1$
- para $\theta = 2\pi$, $e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + \sin(2\pi) = 1$, pelo que $e^z = e^z \times 1 = e^z e^{2\pi i} = e^{z+2\pi i}$ é uma função periódica de período $2\pi i$
- uma expressão muito utilizada em eletricidade pode deduzir-se das anteriores como sendo $e^{z+k\pi i} = e^x e^{k\pi i} = e^z\left(\cos(k\pi) + \sin(k\pi)\, i\right)$

A partir da *fórmula de Euler*, 1.44 e 1.45, definem-se expressões matemáticas para as funções trigonométricas seno e cosseno

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{e^{\theta i}+e^{-\theta i}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{e^{\theta i}-e^{-\theta i}}{2i} \end{cases} \tag{1.46}$$

Em resumo, um complexo pode representar-se pela sua forma algébrica ou graficamente através das formas trigonométrica, polar ou exponencial. Apesar destas três últimas formas terem notações diferentes, correspondem, de facto, a uma só notação. A notação exponencial, servindo-se das propriedades das funções exponenciais, permite realizar de um modo muito fácil as operações de multiplicação, divisão de complexos, de potenciação, assim como da radiciação de números complexos. As relações 1.47, 1.48, 1.49 e 1.50 resumem os resultados fundamentais destas 4 operações com complexos na forma exponencial, sendo estas relações habitualmente designadas por *fórmulas de Moivre*.

$$\left(\rho_1 e^{i\theta_1}\right)\left(\rho_2 e^{i\theta_2}\right) = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} = \rho_1\rho_2 \operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2) \tag{1.47}$$

$$\frac{\rho_1 e^{i\theta_1}}{\rho_2 e^{i\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{cis}(\theta_1-\theta_2) \tag{1.48}$$

$$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta} = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)\,,\ n \in \mathbb{Z} \tag{1.49}$$

$$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \left(\rho e^{i(\theta+2k\pi)}\right)^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\ n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z} \tag{1.50}$$

As raízes de índice n de um número complexo z são n números complexos de módulo $\rho^{\frac{1}{n}}$ e argumentos obtidos por atribuição de valores inteiros consecutivos $0, 1, 2, ..., n-1$ a k.

Teorema 4. *O cálculo da raiz de índice n de um número complexo z* resulta em n raízes distintas.

Exemplo 18.

As raízes cúbicas do número complexo $z = -i$ são obtidas por consideração de

$$\begin{cases} \rho &= \sqrt{0^2+(-1)^2} = 1 \\ \theta &= \arctan\left(\frac{-1}{0}\right) = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

pelo que, através das *fórmulas de Moivre*, se tem $\sqrt[3]{-i} = \operatorname{cis}\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)$, $k = 0, 1, 2$
Substituindo k, tem-se

$$\begin{cases} k=0 & \sqrt[3]{-i} = \operatorname{cis}\left(\frac{-\frac{\pi}{2}}{3}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{-\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) i \\ k=1 & \sqrt[3]{-i} = \operatorname{cis}\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{1\pi}{2}\right) i \\ k=2 & \sqrt[3]{-i} = \operatorname{cis}\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) i \end{cases}$$

Exemplo 19.

As raízes quíntuplas do número complexo $z = 2$ são obtidas por consideração de

$$\begin{cases} \rho &= \sqrt{2^2 - 0^2} = 2 \\ \theta &= \arctan\left(\frac{0}{2}\right) = \arctan(0) = 0 \end{cases}$$

pelo que, através das *fórmulas de Moivre*, se tem $\sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2}\text{cis}\left(\frac{2k\pi}{5}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$
Logo,

$$\begin{cases} k = 0 & \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2}\text{cis}(0) \\ k = 1 & \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2}\text{cis}\left(\frac{2\pi}{5}\right) \\ k = 2 & \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2}\text{cis}\left(\frac{4\pi}{5}\right) \\ k = 3 & \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2}\text{cis}\left(\frac{6\pi}{5}\right) \\ k = 4 & \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2}\text{cis}\left(\frac{8\pi}{5}\right) \end{cases}$$

Exemplo 20.

O $\cos^4 z$ é obtido por utilização das relações de Euler

$$\cos^4 z = \left(\frac{e^{\theta i} + e^{-\theta i}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{\theta i} + e^{-\theta i}\right)^4$$

a aplicação da fórmula do binómio sobre este resultado conduz a

$$= \frac{1}{16}\left(e^{4\theta i} + 4e^{3\theta i}e^{-\theta i} + 6e^{2\theta i}e^{-2\theta i} + 4e^{\theta i}e^{-3\theta i} + e^{-4\theta i}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(e^{4\theta i} + 4e^{2\theta i} + 6 + 4e^{-2\theta i} + e^{-4\theta i}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left[\left(e^{4\theta i} + e^{-4\theta i}\right) + \left(e^{2\theta i} + e^{-2\theta i}\right) + 6\right]$$

tendo, novamente, em conta as relações de Euler

$$= \frac{1}{16}\left[2\cos(4\theta) + 4 \times 2\cos(4\theta)\left(e^{4\theta i} + e^{-4\theta i}\right) + 6\right]$$

obtém-se

$$= \frac{1}{8}\left[\cos(4\theta) + 4\cos(4\theta)\left(e^{4\theta i} + e^{-4\theta i}\right) + 3\right]$$

1.4. Aplicações definidas sobre estruturas algébricas

1.4.1. Endomorfismo entre estruturas algébricas

Definição 52. Homomorfismo

Considere-se o conjunto $\mathbb{K}$ que, munido da operação θ, forma a estrutura algébrica $(\mathbb{K}, \theta)$, classificada como grupoide; considere-se, ainda, outro grupoide $(\mathbb{L}, \varphi)$ formado pelo conjunto $\mathbb{L}$ e sobre o qual está definida a operação φ. Considere-se, por fim, f como sendo uma aplicação $f : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ que transforma a operação θ na operação φ. Diz-se que f é um *homomorfismo* de $(\mathbb{K}, \theta)$ sobre $(\mathbb{L}, \varphi)$ se

$$f(x\theta y) = f(x)\,\varphi f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{K} \tag{1.51}$$

Exemplo 21.

A função identidade, $f(x) = x$, é um homomorfismo de $(\mathbb{Z}, +)$ sobre $(\mathbb{Z}, +)$ porque $f(x+y) = f(x) + f(y)$ é válida para qualquer inteiro relativo.

Definição 53. Endomorfismo

Quando o homomorfismo $(\mathbb{K}, \theta)$ é sobre si próprio, como no exemplo anterior, designa-se também por *endomorfismo.*

Tal como exposto anteriormente, uma função $f : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ diz-se bijetiva se e só se o seu contradomínio coincide com o conjunto de chegada e a objetos diferentes correspondem imagens diferentes, isto é

$$\forall y \in \mathbb{L}\, \exists^1 x \in \mathbb{K} :\ y = f(x) \tag{1.52}$$

Definição 54. Isomorfismo

A aplicação $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{L}$ designa-se por *isomorfismo* do grupoide $(\mathbb{K}, \theta)$ sobre o grupoide $(\mathbb{L}, \varphi)$ se for um homomorfismo bijetivo, isto é, se se verificarem simultaneamente as seguintes condições

$$\begin{cases} \forall y \in \mathbb{L}\, \exists^1 x \in \mathbb{K} :\ y = f(x) \\ f(a \theta b) = f(a)\, \varphi f(b)\,,\ \forall a, b \in \mathbb{K} \end{cases} \tag{1.53}$$

Dois grupoides são isomorfos, isto é, têm a mesma estrutura, se existir um isomorfismo de um sobre o outro. O conceito de isomorfo é muito importante porque garante que as propriedades verificadas pela operação de um grupoide são também verificadas pela operação de qualquer outro grupoide isomorfo com o primeiro.

Na figura 1.12, a aplicação f representa um isomorfismo de $(\mathbb{K}, \theta)$ sobre $(\mathbb{L}, \varphi)$. Em $\mathbb{K}$, sobre o qual está definida a operação θ, x' é o oposto de x e u o correspondente elemento neutro da estrutura $(\mathbb{K}, \theta)$. Os elementos w' e v de $\mathbb{L}$ são o oposto de w e o elemento neutro de φ e correspondem às imagens por f de x' e u de $\mathbb{K}$, respetivamente.

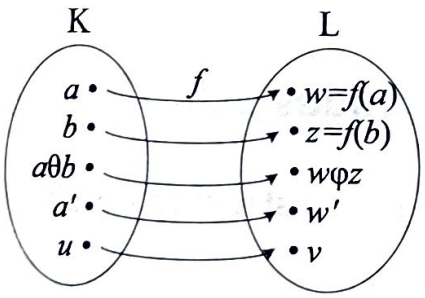


Figura 1.12.: A aplicação f é um isomorfismo de $(\mathbb{K}, \theta)$ sobre $(\mathbb{L}, \varphi)$.

Pode-se estender o conceito de isomorfismo a todas as estruturas já estudadas, inclusive aos anéis e corpos. Por exemplo, o anel $(\mathbb{K}, \theta, \vartheta)$ é isomorfo do anel $(\mathbb{L}, \varphi, \psi)$ se existir uma aplicação f que verifique as condições indicadas em 1.54.

$$\begin{cases} \forall y \in \mathbb{L}\, \exists^1 x \in \mathbb{K} : \; y = f(x) \\ f(a \theta b) = f(a)\, \varphi f(b)\,, \; \forall a, b \in \mathbb{K} \\ f(a \vartheta b) = f(a)\, \psi f(b)\,, \; \forall a, b \in \mathbb{K} \end{cases} \tag{1.54}$$

Estas condições correspondem a analisar se f é um isomorfismo de $(\mathbb{K}, \theta)$ sobre $(\mathbb{L}, \varphi)$ e de $(\mathbb{K}, \vartheta)$ sobre $(\mathbb{L}, \psi)$.

Definição 55. Automorfismo
Um isomorfismo de $(\mathbb{K}, \theta)$ sobre si próprio chama-se *automorfismo*.

1.5. Exercícios resolvidos

1.5.1. Exercícios resolvidos relativos a grupos anéis e corpos

Exercício 1.

Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e as operações $\triangle$ e $\diamondsuit$ definidas por $x \triangle y = \text{mmc}(x, y)$ e $x \diamondsuit y = \text{mdc}(x, y)$ respetivamente. Verifique se alguma das estruturas indicadas pelos pares ordenados $(A, \triangle)$ e $(A, \diamondsuit)$ é grupoide. Alguma das estruturas é um grupoide comutativo?

Resolução.

O conjunto A é não vazio; a operação é interna em A se o resultado da operação entre quaisquer pares de elementos de A for ainda um elemento deste conjunto. Para verificar se as duas operações são internas, pode-se, por exemplo, construir quadros de dupla entrada como os apresentados na tabela 1.9, que agrupam os resultados das operações para todos os pares de elementos de A.

Tabela 1.9.: Quadros de dupla entrada das operações $\triangle$ e $\diamondsuit$ em A.

$\triangle$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	2	6	4	10
3	3	6	3	12	15
4	4	4	12	4	20
5	5	10	15	20	5

$\diamondsuit$	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1
3	1	1	3	1	1
4	1	2	1	3	1
5	1	1	1	1	1

Da análise destes quadros, conclui-se que apenas a operação $\diamondsuit$ é interna, todos os elementos do quadro pertencem a A, pelo que só o par ordenado $(A, \diamondsuit)$ é grupoide. A estrutura $(A, \diamondsuit)$ é grupoide comutativo, pois o quadro é simétrico relativamente à diagonal principal; $(A, \triangle)$ não é grupoide porque o quadro apresenta resultados que não pertencem a A. De notar que nos quadros de dupla entrada é suficiente

confirmar a existência de simetria em relação à diagonal principal para constatar a comutatividade da operação.

Exercício 2.

Considere o conjunto $\mathbb{R}_0^+$ dos números reais não negativos e a operação θ definida por $x\theta y = \frac{xy}{x+y+1}$. Verifique se a estrutura algébrica $(\mathbb{R}_0^+, \theta)$ é um monoide.

Resolução.

O conjunto $\mathbb{R}_0^+$ é não vazio. A operação binária θ é interna, pois a soma de números reais não negativos é um real não negativo, mesmo quando dividido por um real positivo.

Verificação da existência de propriedade comutativa para a operação θ em $\mathbb{R}_0^+$

$$x\theta y = \frac{xy}{x+y+1}$$

$$y\theta x = \frac{yx}{y+x+1}$$

pelo que, como a adição e multiplicação usuais são comutativas, a operação θ também goza da propriedade comutativa.

Verificação da existência de propriedade associativa para a operação θ em $\mathbb{R}_0^+$

$$\begin{aligned} x\theta(y\theta z) &= x\theta\frac{yz}{y+z+1} \\ &= \frac{x\frac{yz}{y+z+1}}{x+\frac{yz}{y+z+1}+1} \\ &= \frac{xyz}{(x+y+1)z+(x+1)y+x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x\theta y)\theta z &= \frac{xy}{x+y+1}\theta z \\ &= \frac{\frac{xy}{x+y+1}z}{\frac{xy}{x+y+1}+z+1} \\ &= \frac{xyz}{(x+y+1)z+(x+1)y+x+1} \end{aligned}$$

pelo que, como $\forall x, y, z \in \mathbb{R}_0^+ : x\theta(y\theta z) = (x\theta y)\theta z$, a operação binária θ também goza da propriedade associativa em $\mathbb{R}_0^+$.

Verificação da existência de propriedade existência de elemento neutro para a operação θ em $\mathbb{R}_0^+$

$$\exists u \in \mathbb{R}_0^+ : x\theta u = u\theta x = x \Rightarrow \frac{xu}{x+u+1} = x \Leftrightarrow \frac{-x(x+1)}{x+u+1} = 0$$

esta equação é indeterminada em u, concluindo-se assim que não existe elemento neutro, logo esta propriedade é falsa para a operação θ em $\mathbb{R}_0^+$, pelo que, embora esta estrutura seja um semigrupo comutativo, não é monoide.

Exercício 3.

Considere o subconjunto dos números reais $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ sobre o qual está definida a operação $x \varphi y = x + y - xy$ e verifique que $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, \varphi)$ é grupo comutativo.

Resolução.

O conjunto $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ é não vazio. A operação φ é interna em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, pois $x \varphi y$ em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ é um real diferente de 1.

Veja-se que em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ se tem $x \varphi y \neq 1$.

$$x \varphi y \neq 1 \Leftrightarrow x + y - xy - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x(1-y) + y - 1 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-y)(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow 1 - y \neq 0 \wedge x - 1 \neq 0$$

Esta é uma condição universal, pois x e y pertencem a $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Verificação da propriedade comutativa para a operação φ em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$x \varphi y = x + y - xy$$

$$y \varphi x = y + x - yx$$

estes resultados são iguais, pois a multiplicação é comutativa em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, pelo que φ é comutativa.

Verificação da propriedade associativa para a operação φ em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$x \varphi (y \varphi z) = x \varphi (y + z - yz) = x + y + z - yz - xy - xz + xyz$$

$$(x \varphi y) \varphi z = (x + y - xy) \varphi z = x + y - xy + z - xz - yz + xyz$$

estes resultados são iguais, pois a multiplicação é associativa em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, pelo que φ é associativa.

Verificação da existência de elemento neutro para a operação φ em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Como a operação φ é comutativa, basta verificar

$$\exists u \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : x \varphi u = x \Rightarrow x + u - xu = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u(1-x) = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

Verificação da existência de elemento oposto para todo o elemento não nulo de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Como a operação φ é comutativa, basta verificar

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \exists x' \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : x \varphi x' = 0 \Rightarrow x + x' - xx' = 0 \Leftrightarrow x' = \frac{x}{x-1}$$

pelo que todo o elemento em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ tem oposto para φ. Logo, a estrutura $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, \varphi)$ é um grupo abeliano.

■

Exercício 4.

Considere-se o conjunto $S = \{1, 2, 3, 4\}$ e a operação $x \cdot y = \text{mod}_5(xy)$ que corresponde ao resto da divisão inteira do produto xy por 5 e se designa, habitualmente, por multiplicação módulo 5. Indique qual é a ordem dos elementos deste grupo $(S, \cdot)$.

Resolução.

A tabela seguinte agrupa os resultados da operação entre todos os elementos do conjunto para a estrutura $(S, \cdot)$

$\cdot$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Da análise da tabela, pode concluir-se que a operação é interna porque todos os resultados pertencem a S, é comutativa, pois há simetria em relação à diagonal principal da tabela, o elemento neutro da operação é o número 1 e cada um dos elementos tem um inverso único. A ordem dos elementos é calculada a partir da definição, e os resultados são os seguintes:

$\text{ord}(1) = 1$, porque $1^1 = 1$

$\text{ord}(2) = 4$, pois $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \cdot 4 = 1$

$\text{ord}(3) = 4$, pois $3^4 = 4 \cdot 4 = 1$

e finalmente,

$\text{ord}(4) = 2$, pois $4^2 = 4 \cdot 4 = 1$

■

Exercício 5.

Considere $\oplus$ e $\otimes$, duas operações sobre o conjunto $\mathbb{R}$ definidas por $x \oplus y = x + y - 2$ e $x \otimes y = 6 - 2(x + y) + xy$.

1. Mostre que a estrutura $(\mathbb{R}, \oplus)$ é grupo comutativo.
2. Verifique que a estrutura $(\mathbb{R}, \otimes)$ é semigrupo comutativo.
3. Comprove que a estrutura $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ é anel comutativo.
4. Determine o elemento unidade do anel.
5. Determine os elementos singulares do anel.
6. Resolva a equação $(x \otimes 3) \oplus (8 \otimes x) = 9$.
7. Determine os divisores de zero do anel.

Resolução.

1. $(\mathbb{R}, \oplus)$ é grupo comutativo se a operação for interna, comutativa, associativa, tiver elemento neutro e todos os elementos tiverem oposto.

   - a operação $\oplus$ é interna em $\mathbb{R}$, pois a adição de reais é um real.
   - a operação $\oplus$ goza da propriedade comutativa

     $x \oplus y = x + y - 2$

     $y \oplus x = y + x - 2$

     estes resultados são iguais, pois a adição é comutativa em $\mathbb{R}$, logo a operação $\oplus$ é comutativa.

- a operação $\oplus$ goza da propriedade associativa
  $x \oplus (y \oplus z) = x \oplus (y + z - 2) = x + y + z - 4$

  $(x \oplus y) \oplus z = (x + y - 2) \oplus z = x + y + z - 4$

  estes resultados são iguais, pois a adição é associativa em $\mathbb{R}$, logo a operação $\oplus$ é associativa.
- a operação $\oplus$ goza da propriedade existência de elemento neutro, u
  $\exists u \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \oplus u = u \oplus x = x$
  sabe-se que a operação goza da propriedade comutativa, pelo que o cálculo do elemento neutro pode-se fazer apenas com uma das relações, por exemplo
  $$\begin{aligned} x \oplus u = x \quad &\Leftrightarrow x + u - 2 = x \\ &\Leftrightarrow u = 2, \ \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$
- a operação $\oplus$ goza da propriedade existência de elemento oposto
  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R} : \ x \oplus x' = x' \oplus x = u \ \forall x \in \mathbb{R}$
- sendo a operação $\oplus$ comutativa, pode-se calcular x' oposto de x do seguinte modo
  $x \oplus x' = 2 \Leftrightarrow x + x' - 2 = 2 \Leftrightarrow x' = 4 - x$
  este resultado é sempre possível em $\mathbb{R}$, pelo que se conclui que todos os elementos reais possuem oposto.

Logo, a estrutura $(\mathbb{R}, \oplus)$ é grupo comutativo.

2. $(\mathbb{R}, \otimes)$ é semigrupo comutativo se a operação for interna, comutativa e associativa
   - A operação $\otimes$ é interna, pois a multiplicação e adição de reais é um real.
   - a operação $\otimes$ goza da propriedade comutativa

     $x \otimes y = 6 - 2(x + y) + xy$

     $y \otimes x = 6 - 2(y + x) + yx$

     como a adição e multiplicação são comutativas em $\mathbb{R}$, então $\otimes$ também é comutativa.
   - a operação $\otimes$ goza da propriedade associativa
     $$\begin{aligned} x \otimes (y \otimes z) \quad &= x \otimes (6 - 2\,(y + z) + yz) \\ &= 6 - 2\,(x + (6 - 2y - 2z + yz)) + x\,(6 - 2y - 2z + yz) \\ &= xyz - 2yz - 2xz + 4z - 2xy + 4y + 4x - 6 \\ (x \otimes y) \otimes z \quad &= (6 - 2\,(x + y) + xy) \otimes z \\ &= 6 - 2\,((6 - 2x - 2y + xy) + z) + (6 - 2x - 2y + xy)z \\ &= xyz - 2yz - 2xz - 2xy + 4z + 4y + 4x - 6 \end{aligned}$$

     como a adição e multiplicação são associativas em $\mathbb{R}$ e os resultados são iguais,

conclui-se que a operação $\otimes$ também é associativa.

Logo, a estrutura $(\mathbb{R}, \otimes)$ é semigrupo comutativo.

3. Tendo em conta os resultados obtidos nas alíneas anteriores, para que a estrutura $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ seja anel comutativo, basta verificar a distributividade da operação $\otimes$ em relação à operação $\oplus$.

à esquerda

$$x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$$

$$6 - 2(x + (y \oplus z)) + x(y \oplus z) = (x \otimes y) + (x \otimes z) - 2$$

$$6 - 2(x + (y + z - 2)) + x(y + z - 2) =$$

$$= (6 - 2(x + y) + xy) + (6 - 2(x + z) + xz) - 2$$

$$10 - 4x - 2y - 2z + xy + xz = 10 - 4x - 2y - 2z + xy + xz$$

e à direita

$$(x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$$

$$6 - 2((x \oplus y) + z) + (x \oplus y)z = (x \otimes z) + (y \otimes z) - 2$$

$$6 - 2((x + y - 2) + z) + (x + y - 2)z =$$

$$= (6 - 2(x + z) + xz) + (6 - 2(y + z) + yz) - 2$$

$$10 - 2x - 2y - 4z + xz + yz = 10 - 2x - 2y - 4z + xz + yz$$

logo, a operação $\otimes$ é distributiva em relação à $\oplus$, pelo que o terno ordenado $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ representa a estrutura de um anel comutativo.

4. Uma vez que está provada a comutatividade da operação $\otimes$, basta procurar o elemento unidade do anel, $1 \in \mathbb{R}$, tal que

$$x \otimes 1 = x$$

$$6 - 2(x + 1) + x1 = x$$

$$1(x - 2) = 3x - 6$$

$$1 = 3, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

pelo que o elemento unidade do anel é $1 = 3$.

5. De modo análogo se podem determinar $x' \in \mathbb{R}$, o elemento inverso de x e concluir da existência de elementos singulares

$$x \otimes x' = 1$$

$$6 - 2(x + x') + x x' = 3$$

$$x' = \frac{2x-3}{x-2} \wedge x \neq 2$$

Logo, todos os elementos do conjunto real são regulares exceto $x = 2$, o zero do anel que é singular.

6. A resolução da equação é dada por

$$(x \otimes 3) \oplus (8 \otimes x) = 9$$

$$(6 - 2(x+3) + 3x) \oplus (6 - 2(8+x) + 8x) = 9$$

$$(6 - 2(x+3) + 3x) + (6 - 2(8+x) + 8x) - 2 = 9$$

$$10 - 2(x+3) - 2(x+8) + 11x = 9$$

$$x = 3$$

7. Seja $s \in \mathbb{R}$ um divisor de zero do anel; determina-se o seu valor, resolvendo a equação seguinte em ordem a s (de notar que o anel é comutativo)

$$s \otimes x = u$$

$$6 - 2(s+x) + sx = 2$$

$$s(x-2) = 2x - 4$$

$$(x-2)(s-2) = 0$$

$$s = 2 \vee x = 2$$

como se considerou na definição que os divisores de zero são diferentes do zero do anel, conclui-se que este anel não tem divisores de zero.

■

Exercício 6.

Mostre que $(\mathbb{Q}, +, \times)$, o terno formado pelo conjunto dos números racionais e pelas operações usuais de adição e multiplicação, respetivamente, é um corpo.

Resolução.

A verificação é imediata, bastando atender a que

- a soma de dois números racionais é um número racional, goza da propriedade associativa, goza da propriedade comutativa, possui o 0 (zero) como seu elemento neutro e qualquer racional tem oposto que corresponde ao seu simétrico, pelo que $(\mathbb{Q}, +)$ é grupo comutativo.
- a multiplicação de números racionais é um número racional, goza da propriedade associativa, goza da propriedade comutativa, possui o 1 (um) como seu elemento neutro e todos os racionais, exceto o zero, têm inverso.
- a multiplicação de racionais é distributiva em relação à adição.

Logo, $(\mathbb{Q}, +, \times)$ é um corpo.

■

Exercício 7.

Prove que o anel comutativo $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$, estudado no exemplo de aplicação da definição 29, é um corpo.

Resolução.

As operações $\oplus$ e $\otimes$ definidas sobre o conjunto dos reais pelas expressões $x \oplus y = x+y-2$ e $x \otimes y = 6-2(x+y)+xy$ formam com $\mathbb{R}$ um anel comutativo. Verificou-se, no ponto 4 desse exemplo, que o anel possui o elemento unidade $1 = 3$ e, no ponto 5 do mesmo exemplo, que todos os elementos reais, exceto o zero do anel $(u = 2)$, possuem elemento inverso dado pela expressão $x' = \frac{2x-3}{x-2}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Conclui-se, assim, que o anel comutativo $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ também é corpo.

1.5.2. Exercícios resolvidos relativos a números complexos

Exercício 8.

Resolva a equação $z^2 - 2z + 4 = 0$.

Resolução.

$z = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}i$

Exercício 9.

Considere $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = -1 - i$ e $z_3 = -\sqrt{2} + \sqrt{6}i$ e determine

1. A forma trigonométrica e a forma exponencial destes três complexos;
2. Calcule $\frac{z_1 z_3}{z_2^3}$. Apresente o resultado na forma algébrica;
3. Calcule as raízes de índice 4 de z_3.

Resolução.

Nesta proposta de resolução vai-se considerar, em todos os cálculos, o argumento principal, isto é, os argumentos terão valores no intervalo $]-\pi, \pi]$.

1. Determinação da forma exponencial, $z = \rho e^{i\theta}$

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{3} - i, \text{ pertence ao } 4^{\text{o}}\text{ Q e } \tan(\theta_1) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2}\left[\cos\left(-\tfrac{\pi}{6}\right) + \sin\left(-\tfrac{\pi}{6}\right)i\right] = 2\left[\cos\left(-\tfrac{\pi}{6}\right) + \sin\left(-\tfrac{\pi}{6}\right)i\right] \\ &= 2\text{cis}\left(-\tfrac{\pi}{6}\right) = 2e^{-\frac{\pi}{6}i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= -1 - i, \text{ pertence ao } 3^{\text{o}}\text{ Q e } \tan(\theta_2) = 1 \\ &= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}\left[\cos\left(\tfrac{5\pi}{4}\right) + \sin\left(\tfrac{5\pi}{4}\right)i\right] = \sqrt{2}\left[\cos\left(\tfrac{5\pi}{4}\right) + \sin\left(\tfrac{5\pi}{4}\right)i\right] \\ &= \text{cis}\left(\tfrac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\text{cis}\left(\tfrac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{-\frac{5\pi}{4}i} \end{aligned}$$

$$z_3 = -\sqrt{2}+\sqrt{6}i, \text{ pertence ao } 2^{o}\ Q \text{ e } \tan(\theta_3) = -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = -\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{6}\right)^2}\,\mathrm{cis}\left(\pi-\tfrac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)i\right)$$

$$= = 2\sqrt{2}\mathrm{cis}\left(\tfrac{2\pi}{3}\right) = 2\sqrt{2}e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

2. Cálculo de $\frac{z_1 z_3}{z_2^3}$

$$\frac{z_1 z_3}{z_2^3} = \frac{\left(2e^{-\frac{\pi}{6}i}\right)\left(2\sqrt{2}e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)}{\left(\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}\right)^3} = \frac{4\sqrt{2}e^{\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)i}}{(\sqrt{2})^3 e^{-\frac{3\pi}{4}\times 3i}} = \frac{4\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}i}}{2\sqrt{2}e^{-\frac{9\pi}{4}i}} = 2e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

$$= 2\left[\cos\left(\tfrac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\tfrac{3\pi}{4}\right)\right] = -\sqrt{2}+\sqrt{2}i$$

3. Cálculo de $\sqrt[4]{z_3}$

$$\sqrt[4]{z_3} = \sqrt[4]{2\sqrt{2}e^{\frac{2\pi}{3}i}}$$

$$= \sqrt[4]{2\sqrt{2}}e^{\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}\right)i},\ k\in\mathbb{Z}$$

$$= \sqrt[8]{8}e^{\left(\frac{2+6k}{12}\pi\right)i},\ k\in\mathbb{Z}$$

Apesar de k poder tomar o valor qualquer número inteiro relativo, facto, bastam apenas os valores -1, 0, e 1 para se calcularem todas soluções na determinação principal.

As soluções de $\sqrt[4]{z_3}$ são:

$$\left\{\sqrt[8]{8}e^{-\frac{5\pi}{6}i}, \sqrt[8]{8}e^{-\frac{\pi}{3}i}, \sqrt[8]{8}e^{\frac{\pi}{6}i}, \sqrt[8]{8}e^{\frac{2\pi}{3}i}\right\}$$

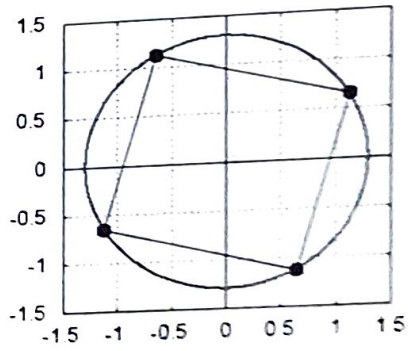


Figura 1.13.: Raízes quartas de z_3.

A figura 1.13 ilustra o conjunto de soluções de $\sqrt[4]{z_3}$, dispostas num polígono regular sobre a circunferência de raio $\sqrt[8]{8}$.

■

1.5.3. Exercícios resolvidos relativos a endomorfismos, homomorfismos, isomorfismos e automorfismos

Exercício 10.

Considere os grupoides (A,θ), (B,ϑ) e (C,ψ) com A, B, e C, subconjuntos de $\mathbb{R}$ e cujas operações são assim definidas

e sejam as funções bijetivas f e g definidas em $\mathbb{R}$ pelas expressões analíticas

$$f: \begin{array}{l} A \longrightarrow B \\ x \rightsquigarrow 3x \end{array} \qquad g: \begin{array}{l} B \longrightarrow C \\ x \rightsquigarrow 2x-1 \end{array}$$

1. Prove que f é um isomorfismo de (A,θ) sobre (B,ϑ) e g um isomorfismo de (B,ϑ) sobre (C,ψ).
2. Determine um isomorfismo de (A,θ) sobre (C,ψ).
3. Sabendo que (A,θ) é grupo comutativo, justifique que tipo de estruturas (B,ϑ) e (C,ψ) apresentam.

Resolução.

1. A aplicação f é bijetiva e verifica a condição $f(a\theta b) = f(a)\vartheta f(b), \forall a,b \in A$ como comprovam os cálculos seguintes

$$\begin{aligned} f(a\theta b) &= f(a+2b+1) \\ &= 3a+6b+3 \\ f(a)\vartheta f(b) &= f(a)+2f(b)+3 \\ &= 3a+6b+3 \end{aligned}$$

pelo que é um isomorfismo de (A,θ) sobre (B,ϑ).

A aplicação g é bijetiva, formando também um isomorfismo de (B,ϑ) sobre (C,ψ) porque a condição $g(a\vartheta b) = g(a)\psi g(b), \forall a,b \in B$ é verdadeira, tal como se constata dos cálculos seguintes

$$\begin{aligned} g(a\vartheta b) &= g(a+2b+3) \\ &= 2(a+2b+3)-1 \\ &= 2a+4b+5 \\ g(a)\psi g(b) &= g(a)+2g(b)+8 \\ &= 2a-1+2(2b-1)+8 \\ &= 2a+4b+5 \end{aligned}$$

As estruturas são isomorfas, pois existe o isomorfismo f entre que (A,θ) e (B,ϑ) e o isomorfismo g entre (B,ϑ) e (C,ψ). São grupos comutativos.

2. Como f é uma aplicação bijetiva de A em B e g uma aplicação bijetiva de B em C, a composição das funções $g \circ f$ é uma aplicação bijetiva de A em C. O isomorfismo de (A,θ) sobre (C,ψ) é, então, $(g \circ f)$.
3. As estruturas são isomorfas porque existe o isomorfismo f entre (A,θ) e (B,ϑ) e o isomorfismo g entre (B,ϑ) e (C,ψ). Assim, estas três estruturas são grupos comutativos.

∎

1.5.4. Exercícios resolvidos em MATLAB

Exercício 11.
Considere os números complexos $z_1 = 1 + i$; $z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) i$ e $z_3 = 3e^{-\pi i}$

1. determine $z_3 - z_1$; $z_3 \times z_1$; $\frac{z_3}{z_1}$; $(z_3)^2$
2. represente graficamente o complexo $z = \frac{2*z_3}{z_1}$
3. indique a parte real, a parte imaginária, o módulo, o argumento e o conjugado de $z = \frac{(3-i)-z_1^5+z_3}{z_2^2}$; utilize a forma polar para confirmar os resultados.

Resolução.

1.

SCRIPT MATLAB 1.1

```
>> z1=1+i; z2=cos(pi/4)+sin(pi/4)*i; z3=3*exp(-pi*i);
>> z3-z1
ans =
    -4.0000 - 1.0000i
>> z3*z1
ans =
    -3.0000 - 3.0000i
>> z3/z1
ans =
    -1.5000 + 1.5000i
>> z3^2
ans =
    9.0000 - 0.0000i
```

2. Para representar graficamente números complexos no MATLAB pode-se usar as funções `compass` ou `plot`.

SCRIPT MATLAB 1.2

```
>> z=2*z3/z1
z =
   -3.0000 + 3.0000i
>> subplot(1,2,1), plot(z,'*');
>> axis([-4 0 0 4]);
>> grid on, xlabel('Eixo real');
>> ylabel('Eixo imaginário');
>> title('Função plot');
>> grid, xlabel('função plot');
>> subplot(1,2,2),compass(z);
>> title('função compass');
```

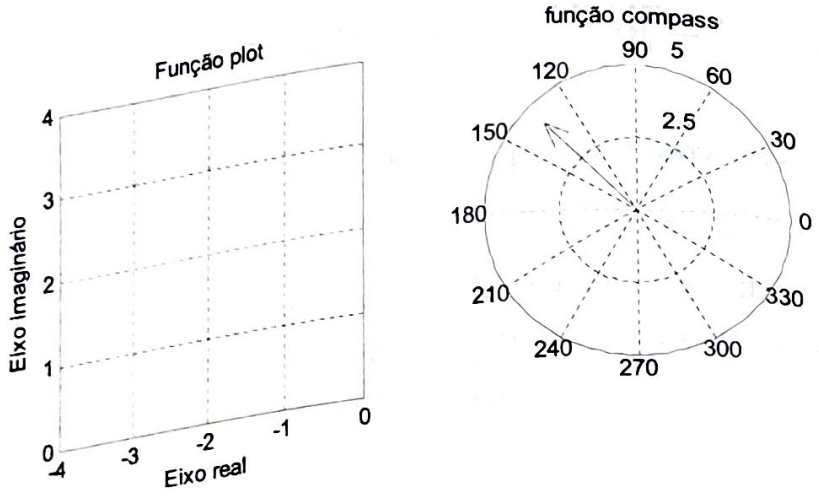


Figura 1.14.: Complexo z.

3.

SCRIPT MATLAB 1.3

```
>> z=(3-i-z1^5+z3)/z2^2
z =
   3.0000 - 4.0000i
>> rz=real(z)
ans =
   3.0000
>> iz=imag(z)
iz =
   -4.0000
>> ro=abs(z)
ro =
   5
>> theta=angle(z)
theta =
   -0.9273
>> cz=conj(z)
cz =
   3.0000 + 4.0000i
>> % verificação com a forma polar
>> zp=ro*exp(theta*i)
zp =
   3.0000 - 4.0000i
```

1.6. Exercícios propostos

1. Mostre que $(\mathbb{R}, +, \times)$, o terno formado pelo conjunto dos números reais e pelas operações usuais de adição e multiplicação, respetivamente, é um corpo
2. Considere a operação binária $\oslash$ definida em $\mathbb{N}$ por $a \oslash b = ab + 1$. Verifique se a operação
   a) é interna
   b) é associativa
   c) é comutativa
   d) tem elemento neutro
3. Considere em $B = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ a operação binária $x \star y = x + y - xy + c$, com $c \in \mathbb{R}$, e
   a) mostre que a operação $\star$ é comutativa
   b) determine o valor de c para o qual a operação $\star$ é associativa
   c) considere o valor de c determinado em b) e
      i. determine o elemento neutro estrutura algébrica $(B, \star)$
      ii. mostre que todos os elementos do conjunto B são regulares
      iii. conclua, indicando que tipo de estrutura algébrica possui $(B, \star)$
4. Seja $F = \{x, -x, \frac{1}{x}, -\frac{1}{x}\}$ o conjunto formado por quatro funções reais de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e
   a) mostre que a operação $\circ$, composição de funções, definida por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ é interna em F
   b) indique que tipo de estrutura possui a estrutura algébrica $(F, \circ)$
5. Considere $\mathcal{P}_1$ o conjunto dos polinómios de grau não superior a 1 e
   a) mostre que a estrutura algébrica $(\mathcal{P}_1, +)$, onde $+$ representa a adição usual de funções reais de variável real, é um grupo comutativo
   b) indique que tipo de estrutura possui $(\mathcal{P}_1, \times)$, onde $\times$ é a multiplicação usual de funções
6. Considere as operações assim definidas em $\mathbb{R}$: $x \triangleright y = x + y - 1$ e $x \triangleleft y = xy - x - y + 2$ e
   a) resolva a equação $(2x \triangleright 2) \triangleleft 3^2 = 4$, em ordem a x
   b) mostre que $(\mathbb{R}, \triangleright, \triangleleft)$ é um anel comutativo
   c) determine o elemento unidade do anel e respetivos elementos singulares
7. Mostre que o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, algebrizado com a adição e multiplicação usuais, forma o corpo $(\mathbb{C}, +, \times)$.
8. Sejam $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$ e $z_3 = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$ e calcule:
   a) $z_1 \times z_2$ e represente o resultado no plano complexo
   b) $\frac{z_1 + z_3}{z_2 \times z_3}$

d) z_1^{-1}

e) as raízes cúbicas de z_1 e represente-as no pano complexo

9. Escreva os seguintes números complexos na forma $z = x + yi$

a) $z_1 = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$

b) $z_2 = 3e^{\frac{\pi}{4}i}$

c) $z_3 = 4e^{\frac{\pi}{3}i}$

10. Escreva os seguintes números complexos na forma $z = \varrho\left[\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right]$

a) $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$

b) $z_2 = (1+i)^{16}$

c) $z_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{-2}$

d) $z_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{\frac{2}{3}}$

11. Simplifique os seguintes números complexos

a) $z_1 = \left(\frac{25}{(1-4i)(5+3i)}\right)^2$

b) $z_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^3$

c) $z_3 = \left(1+\sqrt{3}i\right)^5 + \left(1-\sqrt{3}i\right)^5$

12. Determine todas as raízes das seguintes equações, e represente-as graficamente:

a) $x^4 - 2 = 0$

b) $x^4 - 2x^3 = 3$

c) $x^6 + 1 = 0$

d) $x^3 + 8 = 0$

e) $z^2 - (3-2i)z + 1 - 3i = 0$

f) $z^3 - 3z^2 + 6z - 4 = 0$

13. Calcule as quatro raízes de $z^4 + 1 = 0$ e utilize o resultado para deduzir a fatorização $z^4 + 1 = \left(z^2 - \sqrt{2}z + 1\right)\left(z^2 + \sqrt{2}z + 1\right)$.

14. Mostre que para todo o número complexo z se tem $e^{z+\pi i} = -e^z$.

15. Considere os grupoides $(\mathbb{N}_0, +)$ e $(P_5, \cdot)$, sendo P_5 o conjunto das potências de expoente inteiro e base 5 e

a) mostre que a aplicação $f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow P_5$ definida por $f(n) = 5^n$ é um isomorfismo entre $(\mathbb{N}_0, +)$ e $(P_5, \times)$

b) resolva a equação $f(u) \times f(x+2) = f(3)$, em ordem a x

1.7. Soluções dos exercícios propostos

1. A estrutura$(\mathbb{R}, +, \times)$ é um corpo se forem verificadas as seguintes proposições

   P$_1$ Existência e unicidade da operação interna soma de escalares em $\mathbb{R}$
   $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R} : k_1 + k_2 \in \mathbb{R}$

   P$_2$ Propriedade comutativa da adição em $\mathbb{R}$
   $\forall k_1 + k_2 \in \mathbb{R} : k_1 + k_2 = k_2 + k_1$

   P$_3$ Propriedade associativa da adição em $\mathbb{R}$
   $\forall k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R} : (k_1 + k_2) + k_3 = k_1 + (k_2 + k_3)$

   P$_4$ 0 é elemento neutro da adição em $\mathbb{R}$
   $\forall k_1 \in \mathbb{R} : \quad k_1 + 0 = 0 + k_1 = k_1$

   P$_5$ k_1' é o oposto de k_1 em $\mathbb{R}$
   $\forall k_1 \in \mathbb{R}, \exists\, k_1' \in \mathbb{R} : k_1 + k_1' = k_1' + k_1 = 0$

   P$_6$ existência e unicidade da operação interna multiplicação de escalares em $\mathbb{R}$
   $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R} : k_1 \times k_2 \in R$

   P$_7$ Propriedade comutativa da multiplicação em $\mathbb{R}$
   $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R} : k_1 \times k_2 = k_2 \times k_1$

   P$_8$ Propriedade associativa da multiplicação em $\mathbb{R}$
   $\forall k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R} : k_1 (k_2 \times k_3) = (k_1 \times k_2) \times k_3$

   P$_9$ Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição em $\mathbb{R}$
   $\forall k_1, k_2, k_3 \in R : (k_1 + k_2) \times k_3 = (k_1 \times k_3) + (k_2 \times k_3)$

   P$_{10}$ 1 é elemento neutro da multiplicação em $\mathbb{R}$
   $\forall k_1 \in \mathbb{R} : 1 \times k_1 = k_1 \times 1 = k_1$

   P$_{11}$ k_2^{-1} é elemento inverso de k_1 na multiplicação em $\mathbb{R}$
   $\forall k_1, k_2 \neq 0 \in \mathbb{R}, \exists\, k_2^{-1} \in \mathbb{R} : k_2^{-1} \times k_1 = k_1 \times k_2^{-1} = 1$

   Verificadas as propriedades P$_1$,..., P$_{11}$, pode afirmar-se que $(\mathbb{R}, +, \times)$ é um corpo.

2.

   a) A operação $a \oslash b = ab + 1$ é interna porque a adição e produto de naturais resulta num número natural

   b) Não é associativa porque
   $(a \oslash b) \oslash c = (ab + 1) \oslash c = (ab + 1)\, c + 1 = abc + c + 1$
   é diferente de
   $a \oslash (b \oslash c) = a \oslash (bc + 1) = a\,(bc + 1) + 1 = abc + a + 1$

3. É comutativa porque se verifica a igualdade $a \bigcirc b = b \bigcirc a \Leftrightarrow ab + 1 = ba + 1$

   a) Como a operação é comutativa, basta verificar a existência de elemento neutro à direita ou à esquerda. Assim, tem-se $a \bigcirc u = a \Leftrightarrow au + 1 = a \Leftrightarrow au = a - 1 \Leftrightarrow u = \frac{a-1}{a}$, concluindo-se que não é único. Logo, a operação não tem elemento neutro.

4.

a) É comutativa

b) É associativa se $c = 0$

c)

i. $u = 0$

ii. $x' = \frac{x}{x-1}$

iii. Grupo comutativo ou abeliano

5. Como o conjunto de elementos é reduzido, pode-se estudar esta estrutura através de um quadro de dupla entrada $(F, \circ)$

a) Do quadro, conclui-se que $\circ$ é interna em F

$\circ$	x	$-x$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x}$
x	x	$-x$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x}$
$-x$	$-x$	x	$-\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x}$	x	$-x$
$-\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	$-x$	x

b) A operação é comutativa porque é simétrica em relação à diagonal principal, x é o elemento neutro porque, operado com qualquer outro, resulta sempre no outro elemento e o oposto de cada elemento é ele próprio, pois o elemento neutro surge como resultado na diagonal principal. Logo, conclui-se que $(F, \circ)$ é um grupo comutativo.

6.

a) A operação é interna; associativa; comutativa; tem elemento neutro, u=0; o oposto de um elemento é o seu simétrico: é grupo comutativo

b) A operação não é interna

7.

a) $x = \frac{7}{8}$

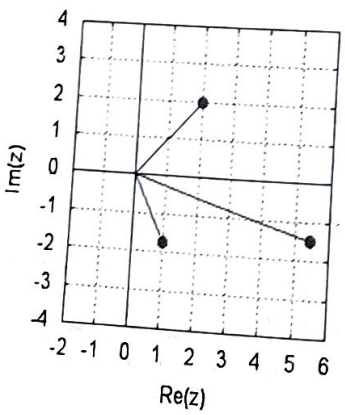
b) Sugere-se ao leitor a verificação (ver exercício proposto 1)

c) 2 é o elemento unidade; o oposto de x é $\frac{x}{x-1}$

8. Sugere-se ao leitor a verificação (ver exercício proposto 1)

9.

a) $2 + 2\sqrt{3} + \left(2 - 2\sqrt{3}\right) i$

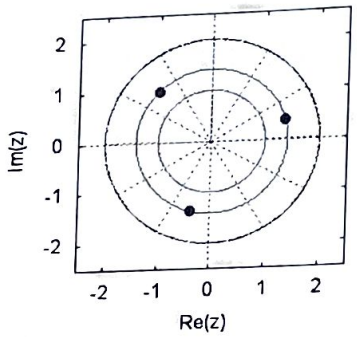


b) $\frac{\sqrt{3}-1}{4} + \frac{\sqrt{3}-1}{4}i$

c) $2048i$

d) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

e) $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{12}i}$, $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$, $\sqrt{2}e^{-\frac{7\pi}{12}i}$



10.

a) $z_1 = \sqrt{3} + i +$

b) $z_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$

c) $z_3 = 2 + 2\sqrt{3}i$

11. -

a) $z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

b) $z_2 = 256(\cos(0) + i\sin(0))$

c) $z_3 = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

d) $z_4 = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

12.

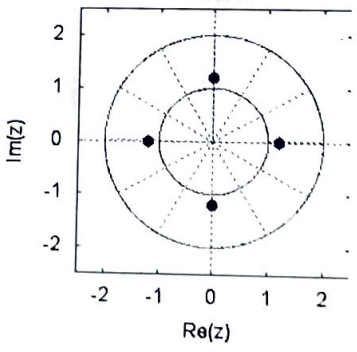
a) $z_1 = \frac{625}{578}i$

b) $z_{2=} - \sqrt{2}$

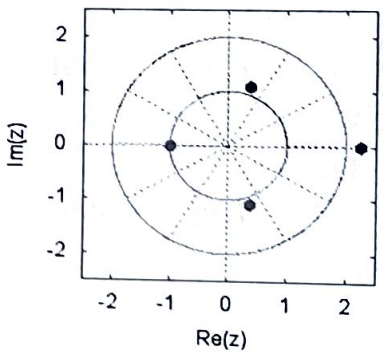
c) $z_3 = 32$

13.

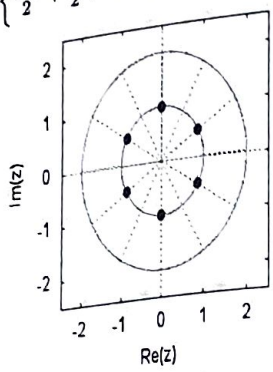
a) $\left\{\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}i, -\sqrt[4]{2}, -\sqrt[4]{2}i\right\}$



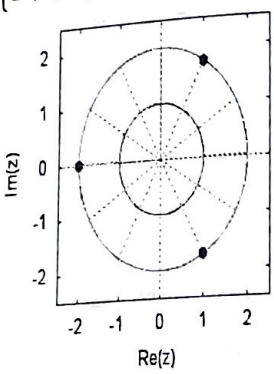
b) $\left\{1 + \sqrt[3]{2}, \frac{2-\sqrt[3]{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}i - 1, \frac{2-\sqrt[3]{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}i\right\}$



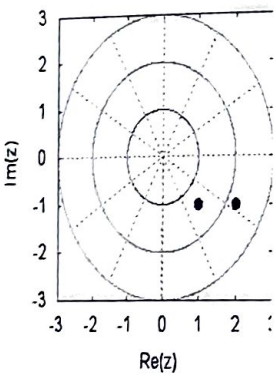
c) $\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i, i, -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i, -i, \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right\}$



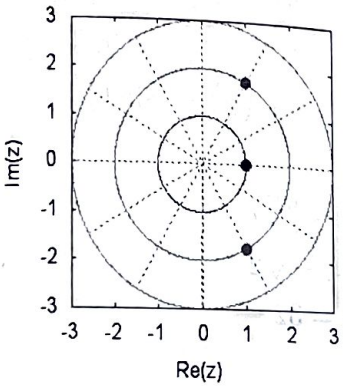
d) $\{1+\sqrt{3}i, -2, 1-\sqrt{3}i\}$



e) $\{1-i, 2-i\}$



f) $\{1, 1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i\}$



14. $z^4+1=0 \Leftrightarrow \left(z^2+i\right)\left(z^2-i\right)=0 \Leftrightarrow z^2+i=0 \vee z^2-i=0$

$z=\frac{\sqrt{2}}{2}(\pm 1 \pm i)$

15. $e^{z+i\pi}=e^z e^{i\pi}=e^z\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)=-e^z$

16. Resolução parcial

a) f é bijetiva;

$f(a+b)=f(a)\times f(b) \Leftrightarrow 5^{a+b}=5^a\times 5^b \Leftrightarrow 5^{a+b}=5^{a+b}$

b) $f(u)\times f(x+2)=f(3) \Leftrightarrow 5^u\times 5^{x+2}=5^3 \Leftrightarrow 5^{x+u+2}=5^3 \Leftrightarrow x=u-1$

CAPÍTULO

2

Cálculo Matricial e Determinantes

O *Cálculo Matricial* é uma área da *Álgebra Linear* na qual estão patentes duas entidades, as matrizes e os determinantes, que são fundamentais para organizar dados e implementar modelos matemáticos que traduzem problemas dependentes de muitas variáveis. Estas entidades permitem a formulação matemática de problemas de elevada complexidade através de uma forma elegante e com uma notação compacta, a qual facilita a perceção do problema a resolver, a sua análise e a sua resolução.

Neste capítulo, o estudo destas novas entidades é efetuado sob um ponto de vista autónomo, iniciado com o estabelecimento das regras operatórias destas entidades e prossegue com a apresentação das propriedades fundamentais que regem a sua aplicação. Assim, nas primeiras secções apresentam-se algum tipos de matrizes, as operações algébricas entre matrizes, entre matrizes e escalares, as operações sobre matrizes e, ainda, as respetivas propriedades. Segue-se a secção de cálculo e propriedades de um determinante e da inversa de uma matriz quadrada para, posteriormente, se finalizar o capítulo com alguns exemplos de aplicação do cálculo matricial, nomeadamente na resolução de equações matriciais.

2.1. Matrizes

Definição 56. Matriz

Considere os números naturais m e n e um corpo $\mathbb{K}$. Chama-se *matriz* $\mathbf{A}$ de dimensões m por n sobre um corpo $\mathbb{K}$, à entidade $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, com $i = 1, 2, \cdots, m$ e $j = 1, 2, \cdots, n$, que representa uma tabela de escalares de $\mathbb{K}$ distribuídos numa malha de m linhas

por n colunas

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Cada elemento a_{ij} da matriz $\mathbf{A}$ é identificável por um par de índices i e j que indicam, respetivamente, a linha e a coluna onde está posicionado esse elemento na matriz, podendo ser um número, uma função, uma outra matriz, etc. O produto das dimensões, $m \times n$, indica o número de elementos que constituem a matriz.

2.1.1. Notação e classificação

A notação adotada neste capítulo atribui à entidade matriz sobre um corpo $\mathbb{K}$ o símbolo definido por uma letra maiúscula em negrito, $\mathbf{A}$, por exemplo, podendo colocar-se o número de linhas e colunas em índice. O número de linhas e colunas são as dimensões da matriz, podendo também designar-se por tipo ou ordem. Existe uma exceção a esta notação para matrizes formadas por uma só linha ou uma só coluna, podendo estas também ser representadas por uma letra minúscula em negrito, $\mathbf{a}$, e designadas de vetores linha ou coluna, respetivamente.

Assim, por exemplo, a matriz $\mathbf{A}_{2\times 3}$ representa a "*matriz* $\mathbf{A}$ *de* 2 *linhas e* 3 *colunas*", "*matriz* $\mathbf{A}$ *de dimensão* 2×3" ou, simplesmente, "*matriz* $\mathbf{A}$ 2 *por* 3"; a matriz $\mathbf{a}_{1\times 4}$ representa a "*matriz* $\mathbf{a}$ *de* 1 *linha e* 4 *colunas*" ou, simplesmente, "*vetor linha*"; a matriz $\mathbf{a}_{3\times 1}$ representa a "*matriz* $\mathbf{a}$ *de* 3 *linhas e* 1 *coluna*" ou, simplesmente, "*vetor coluna*". Utiliza-se o termo "*fila*" quando se pretende referir, indistintamente, as linhas ou colunas de uma matriz.

Definição 57. Matriz racional, real e complexa

De acordo com o corpo $\mathbb{K}$, sobre o qual se consideram todos os escalares que constituem a matriz $[a_{ij}]_{m\times n}$ com $i = 1, 2, \cdots, m$ e $j = 1, 2, \cdots, n$, esta pode ser classificada em *matriz racional* se $a_{ij} \in \mathbb{Q}$, *matriz real* se $a_{ij} \in \mathbb{R}$, *matriz complexa* se $a_{ij} \in \mathbb{C}$

Definição 58. Matriz nula

Chama-se *matriz nula* a uma matriz cujos termos a_{ij} são todos nulos. A matriz nula representa-se por $\mathbf{0}$.

Definição 59. Matriz finita, matriz infinita

De acordo com o número de linhas m, e o número de colunas n, que constituem a matriz $[a_{ij}]_{m\times n}$, em que $i = 1, 2, \cdots, m$ e $j = 1, 2, \cdots, n$, esta pode ser classificada em *matriz finita* se m e n têm valores finitos, *matriz infinita* se m ou n são infinitos.

Exemplo 22.

Classificação de matrizes com base no corpo a que pertencem todos os seus elementos

Matriz racional

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -2 & 3 & 7 \\ 3 & 0 & \frac{4}{5} & 8 \end{bmatrix}$$

Matriz real

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -2 & \sqrt[3]{5} & 7 \\ \ln 3 & 0 & -\frac{4}{3} & 8\pi \end{bmatrix}$$

Matriz complexa

$$\begin{bmatrix} 1+2i & -2 \\ 0 & -3+4i \end{bmatrix}$$

Matriz nula

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definição 60. Matriz retangular, quadrada, linha e coluna

A matriz $[a_{ij}]_{m\times n}$, em que $i = 1, 2, \cdots, m$ e $j = 1, 2, \cdots, n$, diz-se uma *matriz retangular* se $m \neq n$, *matriz quadrada* se $m = n$, *matriz linha* se $m = 1$ e *matriz coluna* se $n = 1$.

No caso de a matriz ser quadrada com n linhas e n colunas, pode apenas indicar-se que a matriz é quadrada de ordem n e denota-se por $\mathbf{A}_{n\times n} = \mathbf{A}_n$.

Exemplo 23.

Classificação de algumas matrizes segundo as suas dimensões

Matriz retangular

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 10 \\ -2 & 1+3i & 4 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Matriz linha

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2-7i & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz coluna

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2+i \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Matriz quadrada de ordem 3

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

Definição 61. Diagonal principal de uma matriz quadrada

A *diagonal principal* de uma matriz quadrada corresponde à sequência ordenada dos elementos da matriz $[a_{ij}]_{n\times n}$ com $i = j$. Esta designação também pode ser utilizada em matrizes retangulares. Neste contexto, a diagonal principal refere-se à diagonal principal da maior matriz quadrada contida na matriz retangular.

Exemplo 24.

A diagonal principal da matriz quadrada $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 7 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 40 & -2 & 5 & -1 \\ 9 & 8 & -4 & 8 & 7 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ é formada pelos elementos $\{2, 0, -2, 8, 3\}$.

As matrizes quadradas possuem características importantes, sendo objeto de estudo mais aprofundado. De seguida, apresentam-se alguns conceitos relacionados com este tipo de matrizes e fundamentais para o estudo e aplicação das matrizes.

Exemplo 25.

- A diagonal principal da matriz $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ é formada pelos elementos $\{5, 3\}$.
- A diagonal principal da matriz $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -7 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é formada pelos elementos $\{3, 6\}$.

Definição 62. Elementos opostos de uma matriz quadrada

Chamam-se *elementos opostos* de uma matriz quadrada aos elementos a_{ij} e a_{ji}, com $(i \neq j)$. Estes elementos ocupam, na matriz, posições simétricas em relação à diagonal principal.

Exemplo 26.

Os elementos opostos da matriz quadrada $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 9 & 2 \end{bmatrix}$ são os pares de elementos $\{2, 0\}$, $\{3, 3\}$ e $\{9, 4\}$.

As matrizes quadradas têm associadas um conjunto de designações que indicam a forma como se apresentam os seus elementos nulos e os seus elementos não nulos.

Definição 63. Matriz triangular superior e triangular inferior

Uma matriz quadrada, $[a_{ij}]_{n \times n}$, em que os elementos abaixo da diagonal são simultaneamente todos nulos, isto é, $a_{ij} = 0, \forall i > j$, diz-se *triangular superior*; se os elementos acima da diagonal são simultaneamente todos nulos, isto é, $a_{ij} = 0, \forall i < j$, diz-se *triangular inferior*.

Exemplo 27.

Algumas matrizes triangulares

- Matriz triangular superior: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 21 & 0 \\ 0 & -1+i & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$
- Matriz triangular superior pura, $a_{ij} = 0, \forall i \geqslant j$: $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- Matriz triangular inferior: $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 8 & 0 \\ -1 & 9 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Matriz triangular inferior pura, $a_{ij} = 0, \forall i \leqslant j$: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & 9 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Definição 64. Matriz diagonal e matriz diagonal vazia

Uma matriz quadrada, $[a_{ij}]_{n\times n}$, em que todos os elementos que não pertençam à diagonal são simultaneamente todos nulos, isto é, $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$, diz-se *matriz diagonal*; se apenas os elementos da diagonal são simultaneamente todos nulos, isto é, $a_{ij} = 0, \forall i = j$, diz-se *matriz diagonal vazia.*

Definição 65. Uma matriz diagonal é simultaneamente matriz triangular superior e triangular inferior.

Exemplo 28.

Algumas matrizes diagonais

- Matriz diagonal, $a_{ij} = 0, i \neq j$: $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
- Matriz diagonal vazia, $a_{ij} = 0, i = j$: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 9 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

Definição 66. Matriz escalar e matriz identidade

Uma matriz diagonal, $[a_{ij}]_{n\times n}$, em que todos os elementos da diagonal são iguais a um escalar k, isto é, $a_{ij} = k, \forall i = j$, diz-se *matriz escalar*; a matriz escalar com $k = 1$, isto é, $a_{ij} = 1, \forall i = j$, diz-se *matriz identidade*. A matriz identidade de ordem n representa-se pelo símbolo $\mathbf{I}_n$ ou, simplesmente, $\mathbf{I}$.

Exemplo 29.

Algumas matrizes escalares

- Matriz escalar, $\begin{cases} a_{ij} = 0, & i \neq j \\ a_{ij} = k, & i = j \end{cases}$: $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
- Matriz identidade, $\begin{cases} a_{ij} = 0, & i \neq j \\ a_{ij} = 1, & i = j \end{cases}$: $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2.2. Operações algébricas com matrizes

Seja $\mathcal{M}$ o conjunto das matrizes de tipo $m\times n$ sobre um corpo $\mathbb{K}$. Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ duas matrizes de $\mathcal{M}$. Neste contexto, aplicam-se as seguintes definições:

Definição 67. Matrizes sobreponíveis

Duas matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, com o mesmo número de linhas e o mesmo número de colunas, dizem-se *sobreponíveis* (ou *do mesmo tipo*).

Definição 68. Elemento homólogo

Um elemento da matriz $\mathbf{A}$ diz-se *homólogo* de um elemento da matriz $\mathbf{B}$, se estiver na mesma posição (linha e coluna) dentro da matriz à qual pertence.

Definição 69. Matrizes iguais

As matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ dizem-se *iguais*, e escreve-se $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, se forem sobreponíveis e se tiverem todos os seus elementos homólogos iguais, isto é,

$$a_{ij} = b_{ij}, \text{ com } i = 1, 2, \cdots, m \text{ e } j = 1, 2, \cdots, n \tag{2.2}$$

Seja $\mathcal{M}$ o conjunto das matrizes de tipo $m\times n$ sobre um corpo $\mathbb{K}$. Sejam, $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ matrizes de $\mathcal{M}$. Neste contexto, são verificadas as propriedades listadas na tabela 2.1.

Tabela 2.1.: Propriedades da igualdade de matrizes.

	Propriedade
P1	$\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{B} \vee \mathbf{A} \neq \mathbf{B}$
P2	$\mathbf{A} = \mathbf{A}$
P3	$\mathbf{A} = \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{A}$
P4	$\mathbf{A} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{C}$

Exemplo 30.

Sejam as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 5 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & y & z \\ x & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

- Dois elementos homólogos das matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são, por exemplo, $a_{32} = 3$ e $b_{32} = -7$, pois pertencem à mesma linha e coluna.
- Admitindo que $\mathbf{C} = \mathbf{D}$, então $x = 3 \wedge y = 4 \wedge z = -1$.
- Dois elementos opostos de $\mathbf{C}$ podem ser, por exemplo, $c_{21} = 2$ e $c_{12} = 0$.

2.2.1. Adição de matrizes

Definição 70. Adição de matrizes

Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ duas matrizes sobreponíveis, sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$. Define-se *adição* de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ como sendo uma matriz $\mathbf{C}$, do mesmo tipo daquelas e cujos elementos são obtidos por soma algébrica dos respetivos elementos homólogos de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, isto é:

$$\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \mathbf{C}_{m\times n} \tag{2.3}$$

com

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ i = 1, 2, \cdots, m \text{ e } j = 1, 2, \cdots, n \tag{2.4}$$

Se as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ não forem sobreponíveis, ou se não tiverem subjacente o mesmo corpo, a adição de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ diz-se indefinida.

Seja $\mathcal{M}$ o conjunto das matrizes de tipo $m\times n$ sobre um corpo $\mathbb{K}$. Sejam, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ e $\mathbf{O}$ matrizes de $\mathcal{M}$. Neste contexto, são verificadas as seguintes propriedades apresentadas na tabela 2.2.

Tabela 2.2.: Propriedades da adição de matrizes.

Designação	Propriedade
Determinação	$\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M} \Rightarrow \mathbf{C} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \in \mathcal{M}$
Comutatividade	$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
Associatividade	$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$
Existência de elemento neutro	$\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{O} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$
Existência de oposto	$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = (-\mathbf{A}) + \mathbf{A} = \mathbf{O}$
Subtração (ver definição 71)	$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$
Igualdade	$\mathbf{A} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{C} = \mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{C} = \mathbf{B} + \mathbf{D}$

Exemplo 31.

- A soma das matrizes, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$ é a matriz
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} (1+7) & (2+0) & (3+1) \\ (4+8) & (5+9) & (6+0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 12 & 14 & 6 \end{bmatrix}$$

- A soma das matrizes $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ é a matriz
$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1+4 \\ 2+5 \\ 3+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

- A soma das matrizes $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, é a matriz
$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} (1+1) & (2-2) & (3+0) & (4+5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

- A soma das matrizes $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$
não é possível, pois a adição de matrizes de tipo diferente é indefinida.

2.2.2. Multiplicação de um escalar por uma matriz

Definição 71. Produto de um escalar por uma matriz

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz sobre um corpo $\mathbb{K}$ e do tipo $m \times n$. Define-se *produto de um escalar* $k \in \mathbb{K}$ *por uma matriz* $\mathbf{A}$ como sendo uma matriz $\mathbf{B}$, do mesmo tipo daquela cujos elementos são obtidos por multiplicação do escalar k por todos os elementos da

matriz $\mathbf{A}$, isto é

$$k\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} \tag{2.5}$$

com

$$b_{ij} = ka_{ij},\ i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n. \tag{2.6}$$

Seja $\mathcal{M}$ o conjunto das matrizes de tipo $m\times n$ sobre um corpo $\mathbb{K}$. Sejam, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrizes de $\mathcal{M}$ e os escalares $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$. Neste contexto, são verificadas as seguintes propriedades apresentadas na tabela 2.3.

Tabela 2.3.: Propriedades da multiplicação de um escalar por uma matriz.

Designação	Propriedade
Determinação	$\mathbf{A} \in \mathcal{M}, \forall k_1 \in \mathbb{K} \Rightarrow \mathbf{B} = (k_1\mathbf{A}) \in \mathcal{M}$
Distributiva em relação à adição de escalares	$(k_1 + k_2)\,\mathbf{A} = (k_1\mathbf{A}) + (k_2\mathbf{A})$
Distributiva em relação à adição matricial	$k_1\,(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k_1\mathbf{A} + k_1\mathbf{B}$
Associatividade mista	$k_1(k_2\mathbf{A}) = k_2(k_1\mathbf{A}) = (k_1k_2)\mathbf{A}$
Existência de elemento neutro à esquerda	$1\mathbf{A} = \mathbf{A}$
Igualdade	$\mathbf{A} = \mathbf{B} \Rightarrow k_1\mathbf{A} = k_1\mathbf{B}$

Exemplo 32.

O produto $3\mathbf{A}$, sendo $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, é matriz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} (3\times 1) & (3\times 2) & (3\times 3) \\ (3\times 4) & (3\times 5) & (3\times 6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}$$

Definição 72. Matriz dos simétricos

A matriz $\mathbf{B} = k_1\mathbf{A}$ para $k_1 = -1$ designa-se por *matriz dos simétricos* de $\mathbf{A}$ e representa-se por $-\mathbf{A} = [-k_{ij}]$.

2.2.3. Multiplicação de matrizes

Definição 73. Multiplicação de matrizes

Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ duas matrizes sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$. Seja $\mathbf{A}$ uma matriz cujo número de colunas é igual ao número de linhas da matriz $\mathbf{B}$, isto é, a matriz $\mathbf{A}$ é de tipo $m \times n$ e a matriz $\mathbf{B}$ é de tipo $n \times p$. Define-se *produto de* $\mathbf{A}$ *por* $\mathbf{B}$ como sendo

uma matriz $\mathbf{C}$ de tipo $m \times p$, tal que

$$\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{B}_{n\times p} = \mathbf{C}_{m\times p} \tag{2.7}$$

com

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik}b_{kj}),\ i = 1, 2, \cdots, m;\ \text{e}\ j = 1, 2, \cdots, p \tag{2.8}$$

Para melhor compreender esta operação, considere-se o seguinte exemplo de multiplicação de matrizes, entendido como o produto de uma matriz linha por uma matriz coluna para se poder, depois, generalizar:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{1\times n}\mathbf{b}_{n\times 1} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} \\ &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}\end{aligned} \tag{2.9}$$

Se se acrescentar à matriz $\mathbf{a}$ uma nova linha, o produto $\mathbf{Ab}$ implica o produto da nova linha de $\mathbf{A}$ pela única coluna de $\mathbf{b}$, isto é:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{2\times n}\mathbf{b}_{n\times 1} = \mathbf{C}_{2\times 1} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{n1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1\mathbf{b}^1 \\ \mathbf{a}_2\mathbf{b}^1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

onde

- $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ são, respetivamente, a primeira e a segunda linha de $\mathbf{A}$;
- $\mathbf{b}^1$ é a coluna de $\mathbf{b}$;
- $\mathbf{a}_1\mathbf{b}^1$ e $\mathbf{a}_2\mathbf{b}^1$ são, respetivamente, a primeira e a segunda linha de $\mathbf{C}$.

Procedendo do mesmo modo, quando a matriz $\mathbf{b}$ possui mais colunas, obtém-se cada elemento c_{ij} da matriz $\mathbf{C}$ pelo produto da i-ésima linha de $\mathbf{A}$ pela j-ésima coluna B:

$$\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{B}_{n\times p} = \mathbf{C}_{m\times p} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1\mathbf{b}^1 & \mathbf{a}_1\mathbf{b}^2 & \cdots & \mathbf{a}_1\mathbf{b}^p \\ \mathbf{a}_2\mathbf{b}^1 & \mathbf{a}_2\mathbf{b}^2 & \cdots & \mathbf{a}_2\mathbf{b}^p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_m\mathbf{b}^1 & \mathbf{a}_m\mathbf{b}^2 & \cdots & \mathbf{a}_m\mathbf{b}^p \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

ou seja

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

pelo que, generalizando, ter-se-á

$$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & b_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & b_{nj} & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} b_{kj}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

Seja $\mathcal{M}_n$ o conjunto das matrizes quadradas de ordem n sobre um corpo $\mathbb{K}$. Sejam $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$ e $\mathbf{O}$ matrizes de $\mathcal{M}_n$. Neste contexto, são verificadas as propriedades indicadas na tabela 2.4.

Tabela 2.4.: Propriedades da multiplicação de matrizes quadradas.

Designação	**Propriedade**
Determinação	$\mathbf{A},\ \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n \Rightarrow \mathbf{C} = (\mathbf{AB}) \in \mathcal{M}_n$
Associatividade	$(\mathbf{AB})\,\mathbf{C} = \mathbf{A}\,(\mathbf{BC})$
Distributividade à direita em relação à adição matricial	$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\,\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$
Distributividade à esquerda em relação à adição matricial	$\mathbf{A}\,(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$
Igualdade	$\mathbf{A} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{C} = \mathbf{D} \Leftrightarrow \mathbf{AC} = \mathbf{BD}$
Existência de elemento absorvente	$\mathbf{AO} = \mathbf{OA} = \mathbf{O}$
Não se verifica a lei do anulamento do produto	$\mathbf{AB} = \mathbf{O} \not\Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{O} \vee \mathbf{B} = \mathbf{O}$
Não se verifica a lei do corte	$\mathbf{AB} = \mathbf{AC} \not\Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{C}$

Exemplo 33.

O produto das matrizes $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 7 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ é a matriz

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} (1\times 0+2\times 7) & (1\times 1+2\times(-1)) & (1\times 6+2\times 5) \\ (3\times 0+4\times 7) & (3\times 1+4\times(-1)) & (3\times 6+4\times 5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -1 & 16 \\ 28 & -1 & 38 \end{bmatrix}$$

Pelo exposto, multiplicar à esquerda uma matriz $\mathbf{B}$ por uma matriz diagonal $\mathbf{A}$ corresponde a multiplicar cada elemento da linha i da matriz $\mathbf{B}$ pelo $i-$*ésimo* elemento da diagonal da matriz diagonal $\mathbf{A}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1m} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{22}b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn}b_{n1} & a_{nn}b_{n2} & \cdots & a_{nn}b_{nm} \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

Exemplo 34.

- O produto das matrizes $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 7 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ é a matriz

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} (2\times 0) & (2\times 1) & (2\times 6) \\ (5\times 7) & (5\times(-1)) & (5\times 5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 12 \\ 35 & -5 & 25 \end{bmatrix}$$

- O produto das matrizes $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 7 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ é a matriz

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} (2\times 0) & (2\times 1) & (2\times 6) \\ (2\times 7) & (2\times(-1)) & (2\times 5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 12 \\ 14 & -2 & 10 \end{bmatrix}$$

Multiplicar à direita uma matriz $\mathbf{B}$ por uma matriz diagonal $\mathbf{A}$ corresponde a multiplicar cada elemento da coluna j da matriz $\mathbf{B}$ pelo $j-$*ésimo* elemento da diagonal da matriz diagonal $\mathbf{A}$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{22}b_{12} & \cdots & a_{nn}b_{1n} \\ a_{11}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{nn}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{m1} & a_{22}b_{m2} & \cdots & a_{nn}b_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

Exemplo 35.

- O produto das matrizes $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 7 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ é a matriz

$$\mathbf{C} = \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} (2 \times 0) & (5 \times 1) & (3 \times 6) \\ (2 \times 7) & (5 \times (-1)) & (3 \times 5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 18 \\ 14 & -5 & 15 \end{bmatrix}$$

- O produto das matrizes $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 7 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ é a matriz

$$\mathbf{C} = \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} (2 \times 0) & (2 \times 1) & (2 \times 6) \\ (2 \times 7) & (2 \times (-1)) & (2 \times 5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 12 \\ 14 & -2 & 10 \end{bmatrix}$$

Para que o produto de duas matrizes seja a matriz nula, não é necessário que alguma delas seja nula.

Exemplo 36.

O produto das matrizes $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz nula porque

$$\mathbf{O} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Seja $\mathcal{M}$ o conjunto das matrizes do tipo $m \times n$ sobre um corpo $\mathbb{K}$, seja o escalar $k \in \mathbb{K}$ e as matrizes $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ e $\mathbf{I}$ matrizes de $\mathcal{M}$. Neste contexto, sempre que a multiplicação de matrizes seja possível, são verificadas as propriedades da tabela 2.5.

Tabela 2.5.: Outras propriedades da multiplicação de matrizes.

Designação	**Propriedade**
Existência de elemento neutro	$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$
Associatividade mista	$(k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B}) = k(\mathbf{AB})$
Não se verifica a comutatividade	$\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ não é sempre verdadeira

Exemplo 37.

- Nas matrizes quadradas $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ os produtos $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{BA}$ são iguais a $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- Nas matrizes retangulares $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ os produtos $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{BA}$ são distintos, pois $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 14 & -1 & 3 \\ 28 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$
- Nas matrizes retangulares $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ o produto $\mathbf{AB}$ é possível, $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 14 & -1 & 3 \\ 28 & -1 & 7 \end{bmatrix}$, mas mas o produto $\mathbf{BA}$ não está definido

Definição 74. Matrizes permutáveis

Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ duas matrizes quadradas de ordem n, se $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ dizem-se *permutáveis* (ou *comutáveis*).

Seja $\mathcal{M}$ o conjunto das matrizes do tipo $n \times n$ sobre um corpo $\mathbb{K}$, verificam-se as propriedades da tabela 2.6.

Tabela 2.6.: Propriedades das matrizes permutáveis.

	Propriedade
P1	Só as matrizes quadradas podem ser permutáveis
P2	As matrizes diagonais da mesma ordem são permutáveis e o seu produto resulta numa matriz igualmente diagonal

Exemplo 38.

São permutáveis as seguintes matrizes

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}$
- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix}$

2.2.4. Potenciação de matrizes com expoente natural

Definição 75. Potenciação de matrizes com expoente natural
Seja n um escalar de $\mathbb{N}$, $\mathcal{M}_n$ o conjunto das matrizes quadradas de ordem n sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $\mathbf{A}$ uma matriz de $\mathcal{M}_n$. *A potência de base* $\mathbf{A}$ *de ordem* n é uma matriz $\mathbf{B}$ do mesmo tipo de $\mathbf{A}$ obtida pelo produto iterado da matriz $\mathbf{A}$ por ela própria n vezes, tal que

$$\begin{cases} \mathbf{A}^0 & = \mathbf{I} \\ \mathbf{A}^n & = \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{A}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{2.15}$$

pelo que

$$\begin{cases} \mathbf{A}^0 & = \mathbf{I} \\ \mathbf{A}^2 & = \mathbf{AA} \\ \mathbf{A}^3 & = \mathbf{AAA} = \mathbf{A}^2\mathbf{A} = \mathbf{AA}^2 \\ \cdots & \end{cases} \tag{2.16}$$

Seja $\mathcal{M}_n$ o conjunto das matrizes quadradas de ordem n sobre um corpo $\mathbb{K}$. Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrizes de $\mathcal{M}_n$ e k, l escalares de $\mathbb{N}$. Neste contexto, são verificadas as seguintes propriedades:

Tabela 2.7.: Propriedades da potenciação de matrizes.

	Propriedade
P1	$\mathbf{A}^k\mathbf{A}^l = \mathbf{A}^{k+l}$
P2	$(\mathbf{A}^k)^l = \mathbf{A}^{k\times l}$
P3	Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ forem permutáveis, $(\mathbf{AB})^k = \mathbf{A}^k\mathbf{B}^k$ Se $k \in \{0,1\}$ a igualdade é válida para $\mathbf{A}$e $\mathbf{B}$não permutáveis
P4	Se $\mathbf{A}$ é uma matriz diagonal, todas as suas potências são matrizes diagonais

Exemplo 39.

As potências da matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ são

$$\mathbf{A}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^4 = \begin{bmatrix} 199 & 290 \\ 435 & 634 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^5 = \begin{bmatrix} 1069 & 1558 \\ 2337 & 3406 \end{bmatrix}$$

Exemplo 40.

A matriz $\mathbf{E} = (\mathbf{A}+3\mathbf{B})\,\mathbf{CD}^2$, sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

é obtida respeitando as regras habituais de prioridade das operações algébricas e atendendo às propriedades das operações algébricas com matrizes

$$\begin{aligned} \mathbf{A}+3\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 9 & 6 \\ 3 & 6 & 3 \\ 3 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 8 & 8 \\ 3 & 7 & 6 \\ 5 & 1 & 11 \end{bmatrix} \\ (\mathbf{A}+3\mathbf{B})\,\mathbf{C} &= \begin{bmatrix} -2 & 8 & 8 \\ 6 & 7 & 6 \\ 5 & 1 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 15 & 10 \\ 27 & 6 \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \\ \therefore (\mathbf{A}+3\mathbf{B})\,\mathbf{CD}^2 &= \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 15 & 10 \\ 27 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 & 154 \\ -55 & 190 \\ -51 & 258 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Definição 76. Matriz periódica, idempotente e nilpotente

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada de ordem n sobre um corpo $\mathbb{K}$. $\mathbf{A}$ diz-se *matriz periódica* de período k quando $\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A} \wedge \mathbf{A}^k \neq \mathbf{A}$ diz-se, *matriz idempotente* quando $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ e diz-se *matriz nilpotente* quando $\mathbf{A}^k = \mathbf{O} \wedge \mathbf{A}^{k-1} \neq \mathbf{O}$. É usual designar esta matriz por matriz nilpotente de ordem k.

Exemplo 41.

São idempotentes as matrizes

- $\mathbf{A} = [1]$
- $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Exemplo 42.

A matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz nilpotente de ordem 3, pois

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2.5. Matriz transposta

Definição 77. Matriz transposta

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz do tipo $m \times n$ sobre um corpo $\mathbb{K}$. Chama-se *matriz transposta* de $\mathbf{A}$ (e representa-se por $\mathbf{A}^T$) à matriz $\mathbf{B}$ de tipo $n \times m$ que se obtém a partir da matriz inicial, trocando ordenadamente as suas linhas pelas suas colunas, isto é,

$$b_{ij} = a_{ji}\ ,\ i = 1, 2, ..., n\ ,\ j = 1, 2, ..., m \tag{2.17}$$

Seja $\mathcal{M}$ o conjunto das matrizes do tipo $m \times n$ sobre um corpo $\mathbb{K}$. Sejam as matrizes $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \cdots, \mathbf{M}$ matrizes de $\mathcal{M}$ e os escalares $k \in \mathbb{K}$ e $n \in \mathbb{N}$. Neste contexto, e desde que as operações adição e multiplicação de matrizes sejam possíveis, são verificadas as propriedades listadas na tabela 2.8.

Tabela 2.8.: Propriedades da matriz transposta.

	Propriedade
P1	$\left(\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}$
P2	$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
P3	$(k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T$
P4	$(\mathbf{AB}\cdots\mathbf{M})^T = \mathbf{M}^T \cdots \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$
P5	$\left(\mathbf{A}^n\right)^T = \left(\mathbf{A}^T\right)^n$

Exemplo 43.

- A matriz transposta de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ é $\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$
  - A transposta de $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ é $\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

(continuação)

- A transposta de $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 5 & 5 \\ 0 & 83 & 7 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ é $\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 83 \\ 2 & 7 & 7 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

2.3. Polinómios

Definição 78. Polinómios

Seja $\mathcal{M}_n$ o conjunto das matrizes quadradas de ordem n sobre um corpo $\mathbb{K}$. Os polinómios da matriz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ podem ser formados a partir de qualquer polinómio definido na variável x, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, onde a_i, $i = 0, \cdots, n$ são escalares e $n \in \mathbb{N}$, do seguinte modo:

$$f(\mathbf{A}) = a_n \mathbf{A}^n + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + ... + a_1 \mathbf{A} + a_0 \mathbf{I} \tag{2.18}$$

Exemplo 44.

Sendo $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ e $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{A}) &= 3\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} + 5\mathbf{I} \\ f(\mathbf{A}) &= 3\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 24 \\ 0 & 27 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Caso $f(\mathbf{A}) = 0$, a matriz $\mathbf{A}$ diz-se uma *raiz* (ou *zero*) do polinómio $f(x)$.

Exemplo 45.

Sendo $g(x) = x^2 - 4x + 3$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ é um zero do polinómio $g(x)$, pois

$$\begin{aligned} g(\mathbf{A}) &= \mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} + 3\mathbf{I} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.4. Operações sobre matrizes

2.4.1. Traço de uma matriz quadrada

Definição 79. Traço de uma matriz
Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada definida sobre um corpo $\mathbb{K}$. O *traço da matriz* $\mathbf{A}$ representa-se por $\operatorname{tr}(\mathbf{A})$ e obtém-se pela adição de todos os seus elementos localizados na diagonal principal

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{2.19}$$

Esta designação é também utilizada em matrizes retangulares. Neste contexto, o traço refere-se à soma de todos os elementos da diagonal principal da maior matriz quadrada contida na matriz retangular.

Seja $\mathcal{M}_n$ o conjunto das matrizes quadradas sobre um corpo $\mathbb{K}$. Sejam as matrizes $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \cdots, \mathbf{M}$ matrizes de $\mathcal{M}_n$ e o escalar $k \in \mathbb{K}$. Neste contexto, e desde que as operações adição e multiplicação de matrizes sejam possíveis, o traço de uma matriz verifica as propriedades da tabela 2.9.

Tabela 2.9.: Propriedades do traço de uma matriz.

	Propriedade
P1	$\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}^T)$
P2	$\operatorname{tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}) + \operatorname{tr}(\mathbf{B})$
P3	$\operatorname{tr}(k\mathbf{A}) = k \operatorname{tr}(\mathbf{A})$
P4	$\operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \operatorname{tr}(\mathbf{BA})$

Demonstração. (P1)
Como os elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}$ são iguais aos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^T$, $\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}^T)$

□

Demonstração. (P2)
$\operatorname{tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii}) + \sum_{i=1}^{n}(b_{ii}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}) + \operatorname{tr}(\mathbf{B})$

□

Demonstração. (P3)
$\operatorname{tr}(\alpha\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n}(\alpha a_{ii}) = \alpha\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}) = \alpha\operatorname{tr}(\mathbf{A})$

□

Demonstração. (P4)
$\text{tr}(\mathbf{AB}) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{ki})) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}(b_{ik}a_{ki})) = \text{tr}(\mathbf{BA})$

Exemplo 46.

- o traço da matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ é $\text{tr}(\mathbf{A}) = 1+1+2 = 4$.
- o traço da matriz $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ é $\text{tr}(\mathbf{B}) = 5+3 = 8$.
- o traço da matriz $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -7 & 0 \\ 5 & -6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é $\text{tr}(\mathbf{C}) = 3-6 = -3$.

2.4.2. Norma de uma matriz quadrada

Sobre uma matriz podem-se definir várias normas. Neste livro vai ser considerada a que se segue.

Definição 80. Norma de uma matriz quadrada

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada sobre um corpo $\mathbb{K}$. Chama-se *norma da matriz* $\mathbf{A}$ (e representa-se por $\|\mathbf{A}\|$) à soma dos quadrados de todos os seus elementos

$$\|\mathbf{A}\| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \tag{2.20}$$

A norma de uma matriz verifica a propriedade apresentada na tabela 2.10.

Tabela 2.10.: Propriedades da norma de uma matriz

Propriedade	
P1	$\|\mathbf{A}\| = \text{tr}(\mathbf{AA}^T) = \text{tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$

Exemplo 47.

A norma da matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ é

$\|\mathbf{A}\| = 1+1+4+1+9+4+1+4 = 25$.

2.5. Algumas matrizes especiais

Definição 81. Matriz simétrica

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada sobre um corpo $\mathbb{K}$. Chama-se *matriz simétrica* à matriz cujos elementos opostos relativamente à diagonal principal são iguais, isto é, verifica-se a igualdade

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \tag{2.21}$$

A forma genérica de uma matriz simétrica de ordem 2 é dada por

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

Relembra-se que a *matriz dos simétricos de* $\mathbf{A}$ é dada por $(-\mathbf{A})$, pelo que importa não confundir com *matriz simétrica*.

A tabela 2.11 apresenta algumas propriedades da matriz simétrica.

Tabela 2.11.: Propriedades da matriz simétrica.

	Propriedade
P1	$\mathbf{A}^n$ é simétrica se $\mathbf{A}$ é simétrica.
P2	A soma de matrizes simétricas é uma matriz simétrica.
P3	O produto de duas matrizes simétricas é uma matriz simétrica se e só se as matrizes forem permutáveis.

Exemplo 48.

A matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ é simétrica.

Definição 82. Matriz hemi-simétrica

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada um corpo $\mathbb{K}$. Chama-se *matriz hemi-simétrica* à matriz que obedece à igualdade

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T \tag{2.23}$$

com

$$\mathbf{A} = \begin{cases} a_{ij} = 0, & \forall i = j \\ a_{ij} = -a_{ji}, & \forall i \neq j \end{cases} \tag{2.24}$$

isto é, os elementos da diagonal principal são necessariamente nulos e os elementos opostos são simétricos. Esta matriz é, por vezes, designada por *matriz anti-simétrica*.

A forma genérica de uma matriz hemi-simétrica de ordem 2 é dada por

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

As propriedades da matriz hemi-simétrica apresentam-se na tabela 2.12.

Tabela 2.12.: Propriedades da matriz hemi-simétrica.

	Propriedade
P1	$\mathbf{A}^n$ é hemi-simétrica, se $\mathbf{A}$ é hemi-simétrica n é um número natural ímpar
P2	A soma de matrizes hemi-simétricas é uma matriz hemi-simétrica
P3	$\mathbf{A}$ decompõe-se na soma de uma matriz simétrica com uma hemi-simétrica $\mathbf{A} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T\right)}_{\text{simétrica}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^T\right)}_{\text{hemi-simétrica}}$

Demonstração. (P3)
Primeiro, veja-se que $\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T\right)$ é uma matriz simétrica.

$$\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}^T + \left(\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T$$

Veja-se, agora, que $\left(\mathbf{A}-A^T\right)$ é uma matriz hemi-simétrica.

$$\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}^T - \left(\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}^T - \mathbf{A} = -\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^T\right)$$

Veja-se, agora, que

$$\tfrac{1}{2}\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T\right) + \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^T\right) = \tfrac{1}{2}\mathbf{A} + \tfrac{1}{2}\mathbf{A}^T + \tfrac{1}{2}\mathbf{A} - \tfrac{1}{2}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$$

□

Exemplo 49.

A matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -5 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz hemi-simétrica porque a simétrica da transposta é

$$-\mathbf{A}^T = -\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -5 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}^T = -\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & -5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -5 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

Conclui-se então que $-\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, isto é, verifica as condições de hemi-simetria.

Exemplo 50.

Sendo $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$, para obter uma matriz simétrica $\mathbf{B}$ e uma matriz hemi-simétrica $\mathbf{C}$, tais que $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$, tem de se atender a que

- Se $\mathbf{B}$ é uma matriz simétrica de ordem 2, então $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$
- Se $\mathbf{C}$ é uma matriz hemi-simétrica de ordem 2, então $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{bmatrix}$

como $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$, então

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 = a \\ 2 = b + d \\ 3 = b - d \\ -5 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 - d \\ 3 = 2 - d - d \\ c = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 - d = 2 + 1/2 = 5/2 \\ d = \frac{3-2}{-2} = -1/2 \\ c = -5 \end{cases}$$

logo,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 5/2 \\ 5/2 & -5 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Definição 83. Matriz conjugada

Chama-se *matriz conjugada* de $\mathbf{A}$ à matriz sobre um corpo $\mathbb{C}$, designada por $\overline{\mathbf{A}}$, cujos elementos que a constituem são os conjugados dos elementos de $\mathbf{A}$.

Sejam as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sobre um corpo $\mathbb{C}$ e o escalar $n \in \mathbb{N}$. Neste contexto, e desde que a operação adição e multiplicação de matrizes seja possível, são verificadas as propriedades listadas na tabela 2.13.

Tabela 2.13.: Propriedades das matrizes conjugadas.

	Propriedade
P1	$\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}$
P2	$\overline{\mathbf{A} + \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}}$
P3	$\overline{\mathbf{A}\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}}\,\overline{\mathbf{B}}$
P4	$\overline{z\mathbf{A}} = \overline{z}\,\overline{\mathbf{A}}$
P5	$\left(\overline{\mathbf{A}}\right)^n = \overline{\mathbf{A}^n}$

Exemplo 51.

- $\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1+i & -2 \\ 1 & -i \\ i & 4i \end{bmatrix}$ é a conjugada de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1-i & -2 \\ 1 & i \\ -i & -4i \end{bmatrix}$
- $\overline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1-i & -2 & 0 \\ 4 & -i & 4-3i \\ 2+i & i & -1-2i \end{bmatrix}$ é a conjugada de $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1+i & -2 & 0 \\ 4 & i & 4+3i \\ 2-i & -i & -1+2i \end{bmatrix}$

Definição 84. Matriz transconjugada

Chama-se *matriz transconjugada* de $\mathbf{A}$ à matriz sobre um corpo $\mathbb{C}$, designada por $\mathbf{A}^*$, que obedece à igualdade

$$\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}}^T \tag{2.26}$$

Exemplo 52.

$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} a-bi & e-fi \\ c-di & g-hi \end{bmatrix}$ é a transconjugada de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a+bi & c+di \\ e+fi & g+hi \end{bmatrix}$

Sejam as matrizes $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \cdots, \mathbf{M}$ sobre um corpo $\mathbb{C}$ e o escalar $n \in \mathbb{N}$. Neste contexto, e desde que a operação adição e multiplicação de matrizes seja possível, são verificadas as seguintes propriedades para a matriz transconjugada:

Tabela 2.14.: Propriedades da matriz transconjugada.

	Propriedade
P1	$(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}$
P2	$(\mathbf{A}^T)^* = (\mathbf{A}^*)^T$
P3	$\overline{(\mathbf{A}^*)} = \overline{\mathbf{A}}^*$
P4	$(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \cdots + \mathbf{M})^* = \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^* + \cdots + \mathbf{M}^*$
P5	$(\mathbf{AB}\cdots\mathbf{M})^* = \mathbf{M}^*\cdots\mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$
P6	$(z\mathbf{A})^* = \bar{z}\mathbf{A}^*$
P7	$(\mathbf{A}^n)^* = (\mathbf{A}^*)^n$

Exemplo 53.

$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 1+i & 1 & i \\ -2 & -i & 4i \end{bmatrix}$ é a transconjugada de $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1-i & -2 \\ 1 & i \\ -i & -4i \end{bmatrix}$

Definição 85. Matriz imaginária pura

Chama-se *matriz imaginária pura* à matriz sobre o corpo $\mathbb{C}$ cuja totalidade dos elementos são imaginários puros.

Exemplo 54.

A matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2i & i \\ -3i & i \end{bmatrix}$ é imaginária pura.

Se $\mathbf{A}$ é imaginária pura, então verifica a relação $\overline{\mathbf{A}} = -\mathbf{A}$.

Exemplo 55.

A matriz $\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -2i & -i \\ 3i & -i \end{bmatrix} = -\mathbf{A}$ é a conjugada de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2i & i \\ -3i & i \end{bmatrix}$

Definição 86. Matriz hermitiana

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada definida sobre o corpo $\mathbb{C}$. $\mathbf{A}$ diz-se *matriz hermitiana* se obedece à igualdade

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^* \tag{2.27}$$

As propriedades da matriz hermitiana apresentam-se na tabela 2.15.

Tabela 2.15.: Propriedades da matriz hermitiana.

	Propriedade
P1	A soma de matrizes hermitianas é uma matriz hermitiana
P2	$\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ é hermitiana
P3	$\mathbf{A}^n$ é hermitiana se $\mathbf{A}$ é hermitiana e n é um número natural

Exemplo 56.

A matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & i & -2i \\ -i & 0 & 1-i \\ 2i & 1+i & 3 \end{bmatrix}$ é hermitiana, pois, como

$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & -i & 2i \\ i & 0 & 1+i \\ -2i & 1-i & 3 \end{bmatrix}$, então

$\mathbf{A}^* = \overline{(\mathbf{A}^T)} = \begin{bmatrix} 2 & i & -2i \\ -i & 0 & 1-i \\ 2i & 1+i & 3 \end{bmatrix}$

Definição 87. Matriz hemi-hermitiana

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada definida sobre o corpo $\mathbb{C}$. $\mathbf{A}$ diz-se *hemi-hermitiana* se obedece à igualdade

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^* \tag{2.28}$$

Esta matriz também é designada por anti-hermitiana.

As propriedades da matriz hemi-hermitiana apresentam-se na tabela 2.16.

Tabela 2.16.: Propriedades da matriz hemi-hermitiana.

	Propriedade
P1	Os elementos da sua diagonal principal são necessariamente nulos e/ou imaginários puros
P2	$\mathbf{A}^n$ é hemi-hermitiana se n é um número inteiro positivo ímpar
P3	A soma de matrizes hemi-hermitianas é uma matriz hemi-hermitiana
P4	Se $\mathbf{A}$ é hemi-hermiteana com elementos exclusivamente reais, então $\mathbf{A}$ é uma matriz hemi-simétrica real.
P5	$\mathbf{A}$ pode decompor-se na soma de uma matriz hermitiana com uma matriz hemi-hermitiana, $\mathbf{A} = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^*)}_{\text{hermitiana}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{A}^*)}_{\text{hemi-hermitiana}}$

Demonstração. (P5)

Primeiro, veja-se que $(\mathbf{A}+\mathbf{A}^*)$ é uma matriz hermitiana.

$$(\mathbf{A}+\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}^* + (\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}^* + \mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^*$$

Veja-se, agora, que $(\mathbf{A}-\mathbf{A}^*)$ é uma matriz hemi-hermitiana.

$$(\mathbf{A}-\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}^* - (\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}^* - \mathbf{A} = -(\mathbf{A}-\mathbf{A}^*)$$

Veja-se, agora, que

$$\tfrac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^*) + \tfrac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{A}^*) = \tfrac{1}{2}\mathbf{A} + \tfrac{1}{2}\mathbf{A}^* + \tfrac{1}{2}\mathbf{A} - \tfrac{1}{2}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$$

□

Exemplo 57.

A matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ia & -b+ic & -e+if \\ b+ic & 0 & -h+ik \\ e+if & h+ik & ig \end{bmatrix}$ é hemi-hermitiana, pois

$$\overline{\mathbf{A}}^T = \begin{bmatrix} -ia & b-ic & e-if \\ -b-ic & 0 & h-ik \\ -e-if & -h-ik & -ig \end{bmatrix} = -\mathbf{A}$$

Em resumo

Transpor, conjugar e transconjugar são três operações sobre matrizes tais que aplicadas sucessivamente duas delas, numa ordem qualquer, se obtém a terceira

- $\overline{(\mathbf{A}^T)} = \overline{\mathbf{A}}^T = \mathbf{A}^*$
- $(\mathbf{A}^T)^* = (\mathbf{A}^*)^T = \left(\left(\overline{\mathbf{A}}\right)^T\right)^T = \overline{\mathbf{A}}$
- $\left(\overline{\mathbf{A}}\right)^* = \overline{\left(\overline{\mathbf{A}}\right)}^T = \mathbf{A}^T$
- Se $\mathbf{A}$ é simétrica, então $\mathbf{A}^T$, $\overline{\mathbf{A}}$, $\mathbf{A}^*$, $\mathbf{A}^n$ são simétricas;
- Se $\mathbf{A}$ é hemi-simétrica, então $\mathbf{A}^T$, $\overline{\mathbf{A}}$, $\mathbf{A}^*$, $\mathbf{A}^n$ são hemi-simétricas;
- Se $\mathbf{A}$ é hermitiana, então $\mathbf{A}^T$, $\overline{\mathbf{A}}$, $\mathbf{A}^*$ são hermitianas;
- Se $\mathbf{A}$ é hemi-hermitiana, então $\mathbf{A}^T$, $\overline{\mathbf{A}}$, $\mathbf{A}^*$ são hemi-hermitianas.

2.6. Equações matriciais

As operações algébricas previamente definidas nesta secção, quando aplicadas em conjunto com as respetivas propriedades, permitem resolver de uma forma expedita problemas de equações matriciais associados a problemas de complexidade elevada e de difícil resolução quando escritos na sua forma não matricial.

Exemplo 58.

Para encontrar a matriz $\mathbf{X}$ que satisfaz a equação $(\mathbf{A}+3\mathbf{B})+\mathbf{X}=\mathbf{CD}$, sendo

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&1&3\\2&1&2\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1&3&2\\1&2&1\\1&0&3\end{bmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\\2&0\end{bmatrix}\ \text{e}\ \mathbf{D}=\begin{bmatrix}1&2&2\\-1&3&1\end{bmatrix}$$

Começa-se por resolver a equação: $(\mathbf{A}+3\mathbf{B})+\mathbf{X}=\mathbf{CD}\iff\mathbf{X}=\mathbf{CD}-(\mathbf{A}+3\mathbf{B})$.

De seguida, calcula-se cada parcela separadamente e tem-se

$$\begin{aligned}\mathbf{A}+3\mathbf{B} &= \begin{bmatrix}1&-1&2\\0&1&3\\2&1&2\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}-1&3&2\\1&2&1\\1&0&3\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1&-1&2\\0&1&3\\2&1&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3&9&6\\6&6&3\\3&0&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&8&8\\6&7&6\\5&1&11\end{bmatrix}\\ \mathbf{CD} &= \begin{bmatrix}1&1\\0&1\\2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\-1&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&5&3\\-1&3&1\\2&4&4\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\text{pelo que } \mathbf{X}=\begin{bmatrix}0&5&3\\-1&3&1\\2&4&4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2&8&8\\6&7&6\\5&1&11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-3&-5\\-7&-4&-5\\-3&3&-7\end{bmatrix}$$

2.7. Operações elementares sobre filas de uma matriz

Sobre as matrizes é possível efetuar três operações elementares sobre as suas filas (linhas ou colunas):

1. Permuta de filas paralelas;
2. Multiplicação de uma fila por um escalar não nulo;
3. Substituição de uma fila k por uma outra obtida pela adição de cada um dos elementos homólogos de uma fila paralela a esta fila k, multiplicados por um qualquer escalar não nulo.

Definição 88. Matrizes equivalentes

Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ duas matrizes do tipo $m \times n$ sobre um corpo $\mathbb{K}$. Diz-se que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são matrizes *equivalentes*, e representa-se por $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, se $\mathbf{B}$ é obtida a partir de $\mathbf{A}$ após se efetuar um número finito de operações elementares em $\mathbf{A}$.

As três operações elementares permitem obter novas matrizes equivalentes, a partir das quais é possível simplificar a resolução de problemas matriciais e obter medidas sobre a matriz que permitem a sua caracterização, tal como se verá mais adiante.

2.7.1. Condensação de uma matriz

A condensação de uma matriz $\mathbf{A}$ é o processo que consiste em - por aplicação de operações elementares sobre matrizes - encontrar uma matriz $\mathbf{B}$ equivalente a $\mathbf{A}$ que seja triangular superior, com elementos principais não nulos e de maior ordem possível.

Definição 89. Pivô de uma matriz

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz do tipo $m \times n$ sobre um corpo $\mathbb{K}$. Chama-se *pivô* (ou elemento redutor) de uma matriz $\mathbf{A}$ a todo o elemento não nulo localizado na sua diagonal principal.

O método de condensação de uma matriz consiste na aplicação conjunta das seguintes duas técnicas:

- A técnica de pivotagem, que consiste na obtenção de pivôs através da aplicação das operações elementares sobre matrizes;[1]
- A técnica de anulamento por linhas, que consiste em anular todos os elementos imediatamente colocados abaixo de cada pivô encontrado através da multiplicação da linha onde está o pivô, por um qualquer escalar não nulo e posterior adição dos novos elementos dessa linha aos elementos homólogos das restantes linhas paralelas (note-se que o anulamento pode, também, ser efetuado por colunas).

[1] Em problemas de grandes dimensões, ou em problemas em que os coeficientes não sejam inteiros, a técnica de escolha de pivô pode ser usada para reduzir os erros de arredondamento. Para este efeito, a técnica de pivotagem mais utilizada é a pivotagem parcial, pois implica menos trabalho que a pivotagem total e, habitualmente, dá bons resultados. Na pivotagem parcial em cada fase do processo, escolhe-se para pivô o elemento da coluna com maior valor absoluto; isto é, trocam-se as linhas de modo a que o elemento da coluna de maior valor absoluto seja o pivô.

Algoritmo para a condensação de uma matriz

O seguinte algoritmo para condensação de uma matriz pressupõe que as duas técnicas anteriormente apresentadas sejam operadas ordenadamente do seguinte modo:

1. Considera-se a matriz inicial $\mathbf{A}$ e fixa-se o 1º pivô, isto é, aquele elemento que será localizado na 1ª linha e na 1ª coluna da matriz. De seguida, aplica-se a técnica de anulamento para anular todos os elementos localizados abaixo do 1º pivô. Chame-se $\mathbf{B}$ à matriz agora obtida;
2. Posteriormente, vão trabalhar-se todos os elementos da matriz $\mathbf{B}$ à exceção daqueles localizados na 1ª linha e na 1ª coluna. Assim, fixa-se o 2º pivô da matriz, isto é, aquele elemento que será localizado na 2ª linha e na 2ª coluna da matriz para, de seguida, se aplicar a técnica de anulamento onde se vão anular todos os elementos localizados abaixo do 2º pivô. Chame-se $\mathbf{C}$ à matriz agora obtida;
3. As etapas seguintes seguem o mesmo raciocínio até que, quando para um determinado pivô já não existirem elementos localizados abaixo dele para anular, o processo termina. A matriz agora obtida será uma matriz $\mathbf{M} \sim \mathbf{A}$ triangular superior. A matriz $\mathbf{M}$ diz-se que está na *forma escalonada*.

Notação

As operações efetuadas em cada matriz, até se obter a matriz condensada, deverão ser indicadas em índice, após os parêntesis da matriz. O símbolo $\leftrightarrow$ deverá representar uma troca de linhas ou colunas.

Exemplo 59.

A condensação da matriz $\mathbf{A}$ tem as seguintes operações

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{L_2 \leftrightarrow L_1} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{L_2 = L_2 - 2L_1} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{L_3 = L_3 + L_2} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

2.7.2. Característica de uma matriz

Definição 90. Característica de uma matriz

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz definida sobre um corpo $\mathbb{K}$. A *característica de* $\mathbf{A}$ representa-se por car $(\mathbf{A})$ e corresponde à ordem da maior matriz identidade que é possível encontrar na matriz após a sua condensação.

Exemplo 60.

A característica da matriz $\mathbf{A}$ obtém-se após a sua condensação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}_{L_3 \leftrightarrow L_1} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{L_2 = L_2 - 2L_1} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -7 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{L_3 = L_3 - L_2} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 3 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & -7 & -10 \\ 0 & 0 & \boxed{9} & 13 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{car}(\mathbf{A}) = 3$$

2.8. Determinante de uma matriz quadrada

Definição 91. *Permutação*

Seja S um conjunto de n números inteiros dispostos por ordem crescente $S = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$. Chama-se permutação a cada um dos diferentes grupos que se pode formar com esses n elementos de S, tal como apresentado na tabela 2.17.

Tabela 2.17.: Permutações de n elementos de um conjunto.

Cardinalidade	Conjunto	Permutações	Permutações totais
1	$S_1 = \{1\}$	$p_1(1)$	$P_1 = 1! = 1$
2	$S_2 = \{1, 2\}$	$p_1(1, 2)$	$P_2 = 2! = 2$
		$p_2(2, 1)$	
3	$S_3 = \{1, 2, 3\}$	$p_1(1, 2, 3)$	$P_3 = 3! = 6$
		$p_2(1, 3, 2)$	
		$p_3(2, 1, 3)$	
		$p_4(2, 3, 1)$	
		$p_5(3, 1, 2)$	
		$p_6(3, 2, 1)$	
n	$S_n = \{1, 2, ..., n\}$	$\cdots$	$P_n = n!$

Diz-se que uma permutação p_i de $S = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ tem uma inversão se um número inteiro maior precede um número inteiro menor, isto é, os elementos não se dispõem na ordem natural.

Definição 92. Permutação principal
Chama-se *permutação principal* à permutação sem inversões.

Definição 93. Paridade de uma classe de permutações
A permutação diz-se *par* se o número de inversões for par e diz-se *ímpar* se o número de inversões for ímpar.

A tabela 2.18 mostra as permutações, inversões e paridade para conjuntos de 1, 2 e 3 elementos

Tabela 2.18.: Tabela de inversões e paridade de 3 elementos de um conjunto.

Cardinalidade	Conjunto	Permutações	Inversões	Paridade
1	$S_1 = \{1\}$	$p_1\,(1)$	0	par
2	$S_2 = \{1,2\}$	$p_1\,(1,2)$	0	par
		$p_2\,(2,1)$	1	ímpar
3	$S_3 = \{1,2,3\}$	$p_1\,(1,2,3)$	0	par
		$p_2\,(1,3,2)$	1	ímpar
		$p_3\,(2,1,3)$	1	ímpar
		$p_4\,(2,3,1)$	2	par
		$p_5\,(3,1,2)$	2	par
		$p_6\,(3,2,1)$	3	ímpar

Teorema 5. *(Teorema de Bezout) Se numa permutação se trocar entre si dois elementos, a permutação muda de classe e, se $n \geq 2$, pode mostrar-se que tem $\frac{n!}{2}$ permutações pares e $\frac{n!}{2}$ permutações ímpares.*

Definição 94. Determinante de uma matriz quadrada
Chama-se *determinante* da matriz quadrada $\mathbf{A}$ de ordem n sobre um corpo $\mathbb{K}$ ao número

$$\det(\mathbf{A}) = \sum (\pm) \underbrace{a_{1j_1}\, a_{2j_2}\, \ldots\ldots\, a_{nj_n}}_{n!\ termos} \tag{2.29}$$

representado pela notação de Cauchy como:

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2.30}$$

ou ainda através da notação de Kronecker, escrevendo-se, neste caso, por

$$\det(\mathbf{A}) = |a_{ij}| \ , \ i, j \in \mathbb{N} \tag{2.31}$$

Em cada termo $(\pm)\ a_{1j_1}\ a_{2j_2}\ \cdots\ a_{nj_n}$, os subíndices relativos às linhas estão na sua ordem natural, enquanto que os subíndices relativos às colunas estão na ordem da permutação $(j_1, j_2, \cdots, j_n)$. Como a permutação $(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ é um conjunto único dos números de 1 a n, não há repetições, pelo que cada termo resulta do produto de n elementos de $\mathbf{A}$ com o seu sinal apropriado, com exatamente um elemento de cada linha e exatamente um elemento de cada coluna.

Os elementos de $|a_{ij}|$, para os quais $i = j$, constituem a diagonal principal do determinante.

Definição 95. Termo de um determinante

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada de ordem n sobre um corpo $\mathbb{K}$. Chama-se *termo* de um determinante de ordem n, ao produto dos elementos do determinante tal que nesse produto apareça um e um só elemento de cada linha e de cada coluna. Neste contexto, um termo é positivo se a permutação que lhe dá origem é de classe par, e um termo é negativo se a permutação que lhe dá origem é de classe ímpar.

O cálculo do determinante de $\mathbf{A}$, $\det(\mathbf{A})$, é efetuado pela adição de todos os produtos entre os elementos da matriz, considerando um por linha e um por coluna, mas cujos índices de coluna correspondem a todas as permutações entre esses índices, sendo o sinal do fator ditado pelo número de inversões na ordem dos índices: $(-)$ para número ímpar e $(+)$ para número par de inversões de ordem.

Ao somar sobre todas as permutações do conjunto S, sendo $S = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$, $\det(\mathbf{A})$ tem-se $n!$ termos na soma, pelo que o determinante de uma matriz quadrada de ordem n corresponde ao somatório de todos os seus termos.

Exemplo 61.

No cálculo do determinante de uma matriz de ordem 3, $\mathbf{A}_{3\times3}$, os índices de coluna podem tomar os valores 1, 2 e 3, resultando num total de $3! = 6$ permutações $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6,\} = \{123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321\}$, sendo $\{0, 1, 1, 2, 2, 3\}$ o respetivo número de inversões de ordem de cada permutação. Assim

$$\det(\mathbf{A}_{33}) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{2.32}$$

Para matrizes de ordem superior não é prático aplicar este procedimento visto que o número de permutações, sendo dado por $n!$, assume valores elevados para $n > 3$, o que dificulta bastante a aplicação deste procedimento de cálculo.

Um conjunto de propriedades e de postulados que neste subcapítulo se vão apresentar irá facilitar o cálculo de determinantes de qualquer ordem.

2.8.1. O Teorema de Laplace

Definição 96. Menor complementar de um elemento de um determinante

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada de ordem n sobre um corpo $\mathbb{K}$. Chama-se *menor complementar* do elemento a_{ij} de um determinante $\det(\mathbf{A})$, e representa-se por $\det(\mathbf{M}_{ij})$, ao determinante que se obtém a partir de determinante inicial $\det(\mathbf{A})$ por eliminação da linha e da coluna à qual pertence aquele elemento.

Definição 97. Complemento algébrico

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada de ordem n sobre um corpo $\mathbb{K}$. Chama-se *complemento algébrico* (ou *co-fator*) do elemento a_{ij} do determinante $\det(\mathbf{A})$, e representa-se por $\mathbf{A}_{ij}$, ao produto do menor complementar desse elemento por $(-1)^{i+j}$

$$\mathbf{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{M}_{ij}) \tag{2.33}$$

Desta definição resulta que um determinante de ordem n tem sempre n^2 complementos algébricos de ordem $n-1$, com $n \in \mathbb{N}$.

Nestas expressões, i e j correspondem, respetivamente, ao índice da linha e ao índice da coluna pertencentes ao elemento a_{ij} do determinante que se está a considerar.

Exemplo 62.

Na matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, podem-se considerar 9 complementos algébricos, um por cada elemento da matriz, sendo cada um deles um determinante de ordem 2. Assim, os complementos algébricos são:

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{A}_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{A}_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{A}_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{A}_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{A}_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{A}_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Uma vez que os complementos algébricos de um determinante $\det(\mathbf{A})$ de ordem n têm ordem inferior em uma unidade à ordem do determinante original, é de considerar que estes sejam mais fáceis de determinar. O *Teorema de Laplace* (TL) sistematiza o cálculo de determinantes de qualquer ordem através de um processo de redução de ordem, recorrendo para isso aos respetivos complementos algébricos do determinante, de acordo com o postulado seguinte:

Teorema 6. *(Teorema de Laplace) O valor de um determinante é igual à soma dos produtos dos elementos de uma sua qualquer fila (linha ou coluna) pelos respetivos complementos algébricos.*

Dois modos de avaliação podem ser considerados. Assim:

- se o desenvolvimento for ao longo da coluna j

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{A}_{ij} \tag{2.34}$$

- se for desenvolvido ao longo da linha i

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{A}_{ij} \tag{2.35}$$

Repare-se que, para facilitar o cálculo do determinante, convém escolher a linha ou coluna que possua o maior número de zeros e, de seguida, fazer o desenvolvimento ao longo dessa fila através do Teorema de Laplace.

Exemplo 63.

- O cálculo do determinante $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$, por aplicação do TL à 1ª linha, por exemplo, resulta em

$$\det(\mathbf{A}) = 1(-1)^{1+1}|3| + (-1)(-1)^{1+2}|2| = 3 + 2 = 5 \quad ;$$

- O cálculo do determinante $\det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, por aplicação do TL à 2ª coluna, por exemplo, resulta em

$$\det(\mathbf{B}) = 1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 5(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= -1(-2-(-12)) + 5(4-(-3)) + 1(-8-1) = -10 + 35 - 9 = 16$$

- O cálculo do determinante $\det(\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, por aplicação do TL à 3ª linha, obviamente para simplificar os cálculos, resulta em

$$\det(\mathbf{C}) = -4(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 4(-2-3) = -20$$

Nestes exemplos, após aplicação do Teorema de Laplace, é fácil verificar que, no caso particular de uma matriz com um só elemento, $\mathbf{A}_{1\times 1} = [a_{11}]$, o determinante é o valor do seu único elemento

$$\det(\mathbf{A}_{1\times 1}) = a_{11} \tag{2.36}$$

e, no caso particular de uma matriz quadrada de ordem 2, $\mathbf{A}_{2\times 2} = [a_{ij}]$, $i, j = 1, 2$, a aplicação do Teorema de Laplace resulta em

$$\det(\mathbf{A}_{2\times 2}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{2.37}$$

Pelo exposto, é evidente que efetuar o cálculo de determinantes de ordem superior a 3 pelo Teorema de Laplace é uma tarefa morosa. De seguida, vão apresentar-se algumas propriedades dos determinantes com o objetivo de facilitar o cálculo de determinantes de matrizes quadradas, independentemente da sua ordem.

2.8.2. Algumas propriedades dos determinantes

O Teorema de Laplace é um processo iterativo, onde o cálculo de determinantes é efetuado por redução sucessiva da ordem do determinante, até se atingir a ordem 1. As propriedades dos determinantes podem facilitar o processo, independentemente da sua ordem.

P_1 Se num determinante forem trocadas ordenadamente as linhas pelas colunas, o valor do determinante não se altera, isto é, $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$

Exemplo 64.

Os determinantes de ordem 2, $\det(\mathbf{A})$ e $\det(\mathbf{A}^T)$, são iguais

$$\left.\begin{array}{l} \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1\times 4 - 3\times 2 = -2 \\ \det(\mathbf{A}^T) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\times 4 - 3\times 2 = -2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$$

P_2 Um determinante é nulo se possuir uma fila (linha ou coluna) de elementos todos nulos

Exemplo 65.

O determinante de 2ª ordem, $\det(\mathbf{B})$, é nulo, pois tem os elementos da 2ª linha todos nulos

$$\det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\times 0 - 0\times 2 = 0$$

P_3 Se, num determinante, forem trocadas duas filas paralelas, este terá um valor simétrico do valor do determinante original

Exemplo 66.

Se ao determinante $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ se trocar a 2ª linha pela 1ª linha, obtém-se um determinante $\det(\mathbf{B})$ simétrico a $\det(\mathbf{A})$

$$\left.\begin{array}{l} \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \\ \det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 4 \times 1 = 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$$

P_4 Se, num determinante, uma fila for multiplicada (ou dividida) por um escalar α, não nulo, o determinante tem como valor o produto (ou quociente) do determinante inicial por α

Exemplo 67.

Se ao determinante $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ se multiplicar a 1ª linha por 5, obtém-se um determinante, $\det(\mathbf{B})$, quíntuplo de $\det(\mathbf{A})$.

Seja $\det(\mathbf{B})$ o determinante que se obtém de $\det(\mathbf{A})$, por multiplicação da 1ª linha da matriz $\mathbf{A}$ por 5

$$\left.\begin{array}{l} \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \\ \det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 5 \times 4 - 15 \times 2 = -10 \end{array}\right\} \Longrightarrow \det(\mathbf{B}) = 5\det(\mathbf{A})$$

Exemplo 68.

Pode-se entender a propriedade anterior como "pôr em evidência" o fator comum a uma fila, tal como se pode ver no exemplo seguinte

- $$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

- $$\begin{vmatrix} 3a & 6 & 9 \\ ab & b & b \\ 2a^2b & 2ab & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ ab & b & b \\ 2a^2b & 2ab & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \times b \begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ a & 1 & 1 \\ 2a^2b & 2ab & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3b \times 2ab \begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ a & 1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = 6ab^2 \times a \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

P_5 Se $\mathbf{A}$ for uma matriz quadrada de ordem n, então $\det(k\mathbf{A}) = k^n \det(\mathbf{A})$

Exemplo 69.

Se $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B}=2\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, então

$\det(\mathbf{B}) = \det(2\mathbf{A}) = 2^3 \det(\mathbf{A})$.

De facto, $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6$

e $\det(\mathbf{B}) = \det(2\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -48 = 2^3 \det(\mathbf{A})$

P_6 Se num determinante duas ou mais filas são iguais ou proporcionais, então o determinante é nulo

Exemplo 70.

Cálculo dos determinantes de $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$:

- $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 1 \times 6 - 3 \times 2 = 0$

  pois os valores da 2^a linha são duplos dos valores da 1^a linha

- $\det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 9 \end{vmatrix} = 0$

  pois os valores da 2^a coluna são triplos dos valores da 1^a coluna

- $\det(\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$

  pois os valores da 1^a coluna são iguais aos valores da 2^a coluna

P_7 Se num determinante, os elementos de uma fila são somas algébricas de n parcelas, o determinante pode decompor-se na adição de n determinantes, onde apenas se altera a fila que se decompõe, mantendo-se inalteradas as restantes filas

Exemplo 71.

A decomposição dos elementos da 1ª coluna de $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}$ na soma de 3 parcelas pode ser, por exemplo,

$$\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1+3+5) & 4 \\ (1+2+3) & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$\mathbf{P_8}$ A soma de determinantes da mesma ordem não é igual ao determinante da soma, isto é, $\det(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \neq \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$

Exemplo 72.

Se $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$ e $\det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$, então

- $\det(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 48$
- $\det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B}) = 6 + 6 = 12$

$\mathbf{P_9}$ Os determinantes de uma matriz diagonal e de uma matriz triangular têm como valor o produto dos elementos das suas diagonais principais

Exemplo 73.

- $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 3 = 6$
- $\det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 0 = 0$
- $\det(\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 3 = 6$

$\mathbf{P_{10}}$ O valor de um determinante não se altera quando aos elementos de uma fila se adicionam os elementos homólogos correspondentes a outra ou outras filas paralelas multiplicadas por um escalar não nulo

Exemplo 74.

Se à 3^{a} linha do determinante $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix}$ foi adicionada a 2^{a} linha multiplicada por -8, obtém-se um determinante $\det(\mathbf{B})$ de igual valor

- $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} = -8$
- $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix}_{L_3 = L_3 - 8L_2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix}$

P_{11} O produto de dois determinantes da mesma ordem corresponde ao determinante do produto das matrizes, isto é, $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$.

Exemplo 75.

Se $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$ e $\det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, então

- $\det(\mathbf{AB}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2$
- $\det(\mathbf{A}) \times \det(\mathbf{B}) = (-2) \times (-1) = 2$

P_{12} $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}^T) = \det(\mathbf{A}^T)\det(\mathbf{B}^T) = \det(\mathbf{A}^T)\det(\mathbf{B})$

Exemplo 76.

Se $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$ e $\det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$, então

- $\det(\mathbf{AB}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -2$
- $\det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}^T) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-2)(1) = -2$
- $\det(\mathbf{A}^T)\det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2)(1) = -2$
- $\det(\mathbf{A}^T)\det(\mathbf{B}^T) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-2)(1) = -2$

Cálculo de determinantes de 3ª ordem a partir da regra de Sarrus

Pelo que anteriormente foi exposto, facilmente se entende que, para calcular o determinante de uma matriz, é vantajoso que se recorra à aplicação conjunta das propriedades dos determinantes e/ou ao Teorema de Laplace. Nesta estratégia de cálculo de determinantes, o ideal será começar por aplicar as propriedades dos determinantes que permitem operar entre filas de forma a obter numa determinada fila apenas um elemento não nulo para, em seguida, aplicar o desenvolvimento de Laplace ao longo dessa fila, obtendo-se, assim, um determinante de ordem inferior à inicial e, portanto, mais fácil de calcular. Este procedimento é repetido as vezes necessárias até que o valor do determinante seja obtido facilmente.

Há, contudo, outras formas de calcular determinantes. Uma regra prática que pode ser usada na resolução de um determinante de 3ª ordem é a regra de Sarrus. Esta regra pode ser aplicada às linhas (ou às colunas) do determinante de um dos seguintes modos:

1. repetindo as 2 primeiras linhas do determinante:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

2. repetindo as 2 primeiras colunas do determinante:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

Exemplo 77.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (2\text{x}5\text{x}2 + (-1)\text{x}(-1)\text{x}(-1) + 3\text{x}1\text{x}(-4)) - ((-1)\text{x}5\text{x}3 + (-4)\text{x}(-1)\text{x}2 + 1\text{x}(-1)\text{x}2) = 16$$

2.8.3. Interpretação geométrica do conceito de determinante

O valor absoluto de um determinante de uma matriz quadrada de ordem n corresponde ao volume n-dimensional de um paralelepípedo de dimensão n que é definido pelas linhas que constituem as linhas da matriz.

Este tema será posteriormente apresentado com mais detalhe no capítulo 5.

2.9. Inversão de matrizes quadradas

Definição 98. Matriz inversa de $\mathbf{A}$

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada de ordem n sobre um corpo $\mathbb{K}$. Chama-se *matriz inversa* de $\mathbf{A}$ e representa-se por $\mathbf{A}^{-1}$ à matriz que satisfaz a equação

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} \tag{2.38}$$

Para todas as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$,...,$\mathbf{M}$ regulares, a matriz inversa verifica as seguintes propriedades

Tabela 2.19.: Propriedades da matriz inversa.

	Propriedade
P1	$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$
P2	$\left(\mathbf{A}^{T}\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{T}$
P3	$\mathbf{I}^{-1} = \mathbf{I}$
P4	$(\mathbf{A}\mathbf{B}\cdots\mathbf{M})^{-1} = \left(\mathbf{M}^{-1}\cdots\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\right)$
P5	$\left(\mathbf{A}^{n}\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{n}, n \in \mathbb{N}$
P6	$(k\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{k}\mathbf{A}^{-1}, k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$
P7	$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$
P8	Uma matriz $\mathbf{A}$ é invertível se e só se $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
P9	A inversa de $\mathbf{A}$, se existir, é única
P10	Se a matriz $\mathbf{A}$é simétrica e invertível, então $\mathbf{A}^{-1}$é simétrica e invertível

Demonstração. (P4)

Por definição de matriz inversa, $(\mathbf{A}\mathbf{B}\cdots\mathbf{M})^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{B}\cdots\mathbf{M}) = \mathbf{I}$.

Então, $(\mathbf{A}\mathbf{B}\cdots\mathbf{M})^{-1} = \left(\mathbf{M}^{-1}\cdots\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\right)$ sse $\left(\mathbf{M}^{-1}\cdots\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\right)(\mathbf{A}\mathbf{B}\cdots\mathbf{M}) = \mathbf{I}$

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{M}^{-1}\cdots\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\right)(\mathbf{A}\mathbf{B}\cdots\mathbf{M}) &= \mathbf{M}^{-1}\cdots\mathbf{B}^{-1}\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\right)\mathbf{B}\cdots\mathbf{M}\\ &= \mathbf{M}^{-1}\cdots\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{B}\right)\cdots\mathbf{M}\\ &= \mathbf{M}^{-1}\cdots\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\right)\cdots\mathbf{M} = \cdots\\ &= \mathbf{I}\end{aligned}$$

Logo, $(\mathbf{A}\mathbf{B}\cdots\mathbf{M})^{-1} = \left(\mathbf{M}^{-1}\cdots\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\right)$

□

Demonstração. (P7)
Por definição de matriz inversa, $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$, logo

$$\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{I})$$

Aplicando as propriedades dos determinantes, tem-se

$$\det(\mathbf{A})\det(\mathbf{A}^{-1}) = 1,$$

ou seja $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$

□

Demonstração. (P9)
Sejam B e C inversas de A. Então, por definição de matriz inversa,

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{I} \wedge \mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

então tem-se

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{I} = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{C}) = (\mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{C} = \mathbf{I}\mathbf{C} = \mathbf{C}$$

logo, se existirem duas inversas, elas são iguais e, por isso, a inversa de uma matriz é única.

□

Exemplo 78.

A inversa da matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ atendendo à relação $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_2$ é

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a-c & b-d \\ 2a-c & 2b-d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pelo que

$$\begin{cases} a-c &= 1 \\ b-d &= 0 \\ 2a-c &= 0 \\ 2b-d &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1+c \\ b = d \\ 2+2c-c = 0 \\ 2d-d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= -1 \\ b &= 1 \\ c &= -2 \\ d &= 1 \end{cases}$$

A inversa da matriz $\mathbf{A}$, é a matriz $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

Definição 99. Matriz regular e matriz singular
Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada de ordem n sobre um corpo $\mathbb{K}$. Diz-se que $\mathbf{A}$ é uma *matriz regular* se $\mathbf{A}$ admite inversa. Caso contrário, $\mathbf{A}$ diz-se *matriz singular*.

Exemplo 79.

A matriz $\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}$, com a_1, a_2, a_3 não nulos, tem como inversa

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_3} \end{bmatrix}, \text{ pois}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.9.1. Cálculo da matriz inversa por condensação

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada regular de ordem n sobre um corpo $\mathbb{K}$ e seja $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ a sua matriz inversa,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

como a matriz $\mathbf{B}$ é a inversa de $\mathbf{A}$ se, e só se, obedecer à condição $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$, então, ter-se-á:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11}) & (a_{11}b_{12}) & \cdots & (a_{11}b_{1n}) \\ (a_{22}b_{21}) & (a_{22}b_{22}) & \cdots & (a_{22}b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{nn}b_{n1}) & (a_{nn}b_{n2}) & \cdots & (a_{nn}b_{nn}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Como para cada coluna j pode ser definido um sistema linear não homogéneo de n equações com n incógnitas b_{1j}, b_{2j}, ..., b_{nj}, então, para as n colunas, ter-se-ão n sistemas de equações todos com a mesma matriz de coeficientes, a matriz $\mathbf{A}$, e diferindo apenas na matriz dos termos independentes.

A determinação da matriz inversa de uma matriz quadrada pode ser efetuada pelo método da condensação, tirando partido do facto de a matriz dos coeficientes das incógnitas ser sempre a mesma matriz $\mathbf{A}$, o que permite que os sistemas possam ser resolvidos simultaneamente pelo método da condensação. Evidencia-se este facto com o seguinte exemplo de uma matriz quadrada de ordem 2:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} &= 1 \\ a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} &= 0 \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} &= 0 \\ a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} &= 1 \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} &= 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} &= 1 \\ a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} &= 0 \end{cases} \end{cases}$$

Algoritmo de Gauss-Jordan para inversão de matrizes quadradas

Dada uma matriz $\mathbf{A}$ quadrada de ordem n sobre um corpo $\mathbb{K}$ com determinante não nulo, um esquema que permite o cálculo da matriz inversa através das operações elementares sobre as linhas desta matriz é dado pelo algoritmo de Gauss-Jordan:

$$[\mathbf{A}\,|\,\mathbf{I}] \sim \underbrace{\cdots}_{\substack{\text{operações elementares} \\ \text{sobre linhas}}} \sim [\mathbf{I}\,|\,\mathbf{A}^{-1}]$$

Exemplo 80.

O cálculo da matriz inversa da matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ por condensação resulta em

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{matrix} \\ L_2=L_2-L_1 \\ L_3=L_3-3L_1 \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 8 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{matrix} \\ L_1=L_1+2L_2 \\ L_3=L_3-10L_2 \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7 & -10 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{matrix} \\ \\ L_3=-\frac{1}{2}L_3 \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 5 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \begin{matrix} \\ L_1=L_1-L_3 \\ L_2=L_2-L_3 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} & -4 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 5 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\therefore \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -3 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -4 & \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} & 5 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Exemplo 81.
Pode-se codificar uma mensagem associando a cada letra do alfabeto um número inteiro e enviar a lista de números que substitui a mensagem. A teoria de matrizes é usada neste contexto para o cálculo de inversas com propriedades especiais.
A mensagem "BOM ESTUDO!" pode ser codificada por: 2, 15, 13, 30, 5, 19, 20, 21, 4, 15, 28, onde cada número representa a letra que está na mesma coluna da tabela:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

P	Q	R	S	T	U	V	X	Y	W	Z	.	!	?	
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Para complicar ainda mais a codificação da mensagem e para impedir que o código seja quebrado, usa-se a seguinte técnica: o código que representa a mensagem é colocado nas colunas de uma matriz **A**, que vai ser pré-multiplicada por uma outra matriz antes de ser enviada.

Neste exemplo, tem-se $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 & 30 \\ 15 & 19 & 15 & 30 \\ 13 & 20 & 28 & 30 \\ 30 & 21 & 30 & 30 \end{bmatrix}$

A matriz **A** vai ser pré-multiplicada pela matriz **M** que deve ser invertível e a inversa de **M** deve ter por elementos números inteiros. Para isso, **M** deve verificar as seguintes propriedades

- Os elementos de **M** são números inteiros.
- $\det(\mathbf{M}) = \pm 1$.

Seja, então, **M** a matriz $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

a matriz **M** verifica as condições, pois é invertível e $\det(\mathbf{M}) = 1$.

Como $\mathbf{MA} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -9 & 30 \\ 58 & 60 & 73 & 90 \\ 15 & 2 & 15 & 0 \\ 30 & 21 & 30 & 30 \end{bmatrix}$

a mensagem codificada que deve ser enviada é 4, 58, 15, 30, 4, 60, 2, 21, -9, 73, 15, 30, 30, 90, 0, 30.
O recetor da mensagem conhece a matriz **M** e a tabela com o código. Quando recebe a mensagem, começa por colocá-la numa matriz

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & -9 & 30 \\ 58 & 60 & 73 & 90 \\ 15 & 2 & 15 & 0 \\ 30 & 21 & 30 & 30 \end{bmatrix}$$

depois consegue descodificá-la, multiplicando-a por $\mathbf{M}^{-1}$, pois $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{MA} = \mathbf{A}$. Primeiro, determine-se $\mathbf{M}^{-1}$ e de seguida a matriz **A**.

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{MA} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 & -9 & 30 \\ 58 & 60 & 73 & 90 \\ 15 & 2 & 15 & 0 \\ 30 & 21 & 30 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 & 30 \\ 15 & 19 & 15 & 30 \\ 13 & 20 & 28 & 30 \\ 30 & 21 & 30 & 30 \end{bmatrix}$$

Obtém-se assim a mensagem inicial 2, 15, 13, 30, 5, 19, 20, 21, 4, 15, 28,30, 30, 30, 30, 30, que, utilizando a tabela dos códigos, corresponde à mensagem "BOM ESTUDO!".

2.10. Potências de matrizes (expoente inteiro negativo)

Definição 100. Seja $m, n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{M}_m$ o conjunto das matrizes quadradas de ordem m sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $\mathbf{A}$ uma matriz regular de $\mathbf{M}_m$. Chama-se *potência de* $\mathbf{A}$ *de ordem* $(-n)$ à matriz do mesmo tipo de $\mathbf{A}$ obtida por

$$\mathbf{A}^{-n} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.39}$$

Exemplo 82.

Se $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 8 & -5 & 2 \\ -11 & 7 & -3 \end{bmatrix}$, então $\mathbf{A}^{-2} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^2$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 8 & -5 & 2 \\ -11 & 7 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 8 & -5 & 2 \\ -11 & 7 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & 10 & -3 \\ -46 & 31 & -8 \\ 67 & -45 & 12 \end{bmatrix}$$

2.11. Outras matrizes quadradas especiais

Definição 101. Matriz ortogonal

Seja $m, n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{M}_m$ o conjunto das matrizes quadradas de ordem m sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $\mathbf{A}$ uma matriz regular de $\mathbf{M}_m$. Chama-se *matriz ortogonal* à matriz que obedece à igualdade:

$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} \tag{2.40}$$

pelo que $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$

Tabela 2.21.: Propriedades da matriz ortogonal.

	Propriedade
P1	Uma matriz ortogonal é, necessariamente, quadrada
P2	O determinante de uma matriz ortogonal é igual a ± 1
P3	o produto de duas matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal

Exemplo 83.

As matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são ortogonais

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & \sqrt{1-a^2} \\ \sqrt{1-a^2} & -a \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Demonstração. (P2)
Por definição de matriz ortogonal $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}$. Logo, $\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{I})$. Aplicando as propriedades dos determinantes, tem-se $\det(\mathbf{A})\det(\mathbf{A}^T) = 1$, ou seja
$(\det(\mathbf{A}))^2 = 1$, pelo que $\det(\mathbf{A}) = \pm 1$.

□

Demonstração. (P3)
Por definição de matriz ortogonal, $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}$ e $\mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{I}$. Logo,
$(\mathbf{A}\mathbf{B})(\mathbf{A}\mathbf{B})^T = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^T\right)\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\mathbf{I}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}$

□

Definição 102. Matriz unitária
Seja $m, n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{M}_m$ o conjunto das matrizes quadradas de ordem m sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $\mathbf{A}$ uma matriz regular de $\mathbf{M}_m$. Chama-se *matriz unitária* à matriz complexa e regular que obedece à igualdade:

$$\mathbf{A} = \left(\overline{\mathbf{A}}\right)^{-1} \tag{2.41}$$

pelo que $\mathbf{A}\overline{\mathbf{A}} = \overline{\mathbf{A}}\mathbf{A} = \mathbf{I}$

Exemplo 84.

A matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ é uma matriz unitária

Definição 103. Matriz normal
Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrizes quadradas de ordem n sobre um corpo $\mathbb{K}$. Chama-se *matriz normal* à matriz que obedece à igualdade

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} \tag{2.42}$$

se $\mathbf{A}$ é uma matriz real ou

$$\mathbf{B}\overline{\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{B}}\mathbf{B} \tag{2.43}$$

se $\mathbf{B}$ é uma matriz complexa.

Exemplo 85.

- A matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ é uma matriz normal
- A matriz $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1-3i & 1+i \\ 1+3i & 1 & i \\ 1-i & -i & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz normal

2.12. Exercícios resolvidos

Exercício 12.

Considere a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} i & 3 & -4 \\ 1 & -1 & i \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$. Determine:

1. A norma da matriz $\mathbf{A}$
2. A transposta de $\mathbf{A}$
3. O traço da matriz $\mathbf{A}\,\mathbf{A}^T$

Resolução.

1. $\|\mathbf{A}\| = -1+9+16+1+1-1+0+4+25 = 54$
2. $\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} i & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & i & 5 \end{bmatrix}$
3. $\mathbf{A}\,\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} i & 3 & -4 \\ 1 & -1 & -i \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -i & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 5i-3 & -14 \\ 5i-3 & 1 & -2-5i \\ -14 & -2-5i & 29 \end{bmatrix}$

   $\operatorname{tr}\left(\mathbf{A}\,\mathbf{A}^T\right) = 24+1+29 = 54$

■

Exercício 13.

(Aplicação do produto de matrizes ao tratamento de imagens)

Considere o símbolo + da figura 2.1 determinado por 8 pontos ou vértices. As coordenadas desses pontos estão guardadas na matriz de dados, $\mathbf{D}$

$$\mathbf{D} = \begin{array}{l} \\ \textit{Coordenada } x \\ \textit{Coordenada } y \end{array} \begin{array}{c} \textit{vértices} \\ \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & 3 & 3 & 0.5 & -0.5 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 0.5 & -0.5 & -3 & -3 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Além desta matriz, seria necessária uma outra matriz onde se especificasse quais os vértices que estavam ligados por meio de linhas mas, neste exercício, vai-se omiti-la.

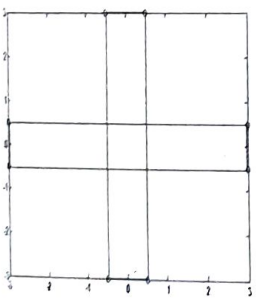


Figura 2.1.: Imagem original.

1. Qual o efeito de multiplicar **D** pela matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$?
2. Qual será agora o efeito de multiplicar **AD** pela matriz $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$?

Resolução.

1. Utilizando a definição de multiplicação de matrizes, tem-se

$$\mathbf{AD} = \begin{bmatrix} 0.25 & 1.25 & 3.125 & 2.875 & -0.25 & -1.25 & -3.125 & -2.875 \\ 3 & 3 & 0.5 & -0.5 & -3 & -3 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

ou seja, efetua-se um rotação distorcida ao símbolo + (ver figura 2.2).

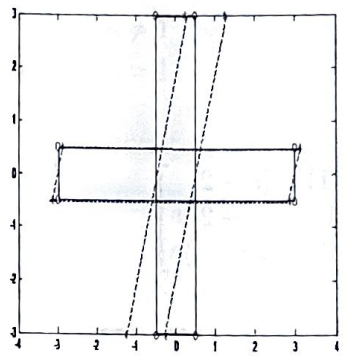


Figura 2.2.: Imagem após rotação.

a) Utilizando a definição de multiplicação de matrizes, tem-se a matriz **SAD**

$$\begin{bmatrix} 0.1875 & 0.9375 & 2.3438 & 2.1563 & -0.1875 & -0.9375 & -2.3438 & -2.1563 \\ 3 & 3 & 0.5 & -0.5 & -3 & -3 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

ou seja, diminui-se a abertura do símbolo + inclinado (ver figura 2.3).

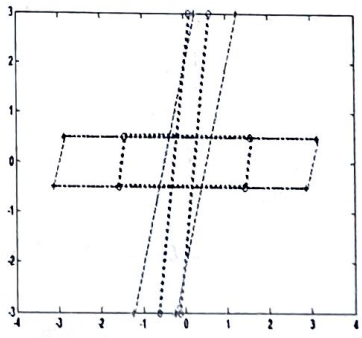


Figura 2.3.: Escalamento do objeto na imagem após rotação.

■

Exercício 14.
Estude a característica das matrizes seguintes em função do parâmetro $a (a \in \mathbb{R})$:

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

2. $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & a & 1 \\ 1 & 6 & (6+2a) & 1 \end{bmatrix}$

3. $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$

4. $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -2 & (2a-1) & (a-2) \\ (a-2) & (a-1) & (a-2) \\ (a-1) & (2a-1) & (2a-1) \end{bmatrix}$

Resolução.

1.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{L_2=L_2-L_1} \sim \begin{bmatrix} \blacksquare & a & 0 \\ 0 & (2-a) & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \text{car}(\mathbf{A}) = \begin{cases} 3 & \Leftarrow a \neq 2 \\ 2 & \Leftarrow a = 2 \end{cases}$$

2.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & a & 1 \\ 1 & 6 & (6+2a) & 1 \end{bmatrix}_{L_2=L_2+L_1} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & (a+3) & 1 \\ 0 & 4 & (3+2a) & 1 \end{bmatrix}_{L_3=L_3-L_2}$$

$$\sim \begin{bmatrix} \blacksquare & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \blacksquare & (a+3) & 1 \\ 0 & 0 & \blacksquare\blacksquare\blacksquare & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \text{car}(\mathbf{B}) = \begin{cases} 3 & \Leftarrow a \neq 0 \\ 2 & \Leftarrow a = 0 \end{cases}$$

3.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}_{\substack{L_2=L_2-L_1 \\ L_3=L_3-L_1 \\ L_4=L_4-L_1}} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & (a-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (a-1) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \text{car}(\mathbf{C}) = \begin{cases} 4 & \Leftarrow a \neq 1 \\ 1 & \Leftarrow a = 1 \end{cases}$$

4.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -2 & (2a-1) & (a-2) \\ (a-2) & (a-1) & (a-2) \\ (a-1) & (2a-1) & (2a-1) \end{bmatrix}_{\substack{L_3=L_3-L_1 \\ L_3=L_3-L_1}} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} -2 & (2a-1) & (a-2) \\ a & -a & 0 \\ 1 & a & (a+1) \end{bmatrix}_{L_1 \leftrightarrow L_3} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & a & (a+1) \\ a & -a & 0 \\ -2 & (2a-1) & (a-2) \end{bmatrix}_{\substack{L_2=L_2-aL_1 \\ L_3=L_3+2L_1}} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & a & (a+1) \\ 0 & -a(a+1) & -a(a+1) \\ 0 & (3a-1) & (2a-1) \end{bmatrix}_{C_2=C_2-C_3} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & (a+1) \\ 0 & 0 & -a(a+1) \\ 0 & a & (2a-1) \end{bmatrix}_{L_2 \leftrightarrow L_3} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & (a+1) \\ 0 & a & (2a-1) \\ 0 & 0 & -a(a+1) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \text{car}(\mathbf{E}) = \begin{cases} 3 & \Leftarrow a \neq -1 \wedge a \neq 0 \\ 2 & \Leftarrow a = -1 \vee a = 0 \end{cases}$$

■

Exercício 15.

Encontre o valor de $x \in \mathbb{R}$, tal que $\begin{vmatrix} 1 & x & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & x \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

Resolução.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}_{L_4 \leftrightarrow L_1} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & x \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}_{C_1 \leftrightarrow C_2}$$

$$-\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & x & -1 & 2 \end{vmatrix}_{\substack{L_2=L_2+3L_1 \\ L_3=L_3+4L_1 \\ L_4=L_4+L_1}} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & x \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}_{\substack{L_2=L_2+L_1 \\ L_3=L_3+2L_1}}$$

$$-\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 11 & 1 \\ 0 & 10 & 13 & 3 \\ 0 & x+2 & 2 & 2 \end{vmatrix}_{C_2 \leftrightarrow C_4} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & x \\ 0 & 5 & x-1 \\ 0 & 3 & 3+2x \end{vmatrix}_{L_2=L_2-2L_3}$$

$$+\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 11 & 7 \\ 0 & 3 & 13 & 10 \\ 0 & 2 & 2 & x+2 \end{vmatrix}_{\substack{L_2=L_2-3L_1 \\ L_3=L_3-3L_2}} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & x \\ 0 & -1 & -3x-7 \\ 0 & 3 & 3+2x \end{vmatrix}_{L_3=L_3+3L_2}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 11 & 7 \\ 0 & 0 & -20 & -11 \\ 0 & 0 & -20 & x-12 \end{vmatrix}_{L_4=L_4-L_3} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & x \\ 0 & -1 & -3x-7 \\ 0 & 0 & -7x-18 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 11 & 7 \\ 0 & 0 & -20 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} \qquad -\begin{vmatrix} -1 & 2 & x \\ 0 & -1 & -3x-7 \\ 0 & 0 & -7x-18 \end{vmatrix}$$

$20(x-1) = 7x+18 \Leftrightarrow 13x = 38 \Leftrightarrow x = \frac{38}{13}$

∎

Exercício 16.

Verifique se o determinante $\det(A) = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 9 \\ 5 & 1 & 8 \\ 10 & 0 & 16 \end{vmatrix}$ é múltiplo de 6.

Resolução.

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}) &= \left|\begin{array}{ccc} 6 & 1 & 9 \\ 5 & 1 & 8 \\ 10 & 0 & 16 \end{array}\right|_{C_1 \leftrightarrow C_2} \\
&= -\left|\begin{array}{ccc} 1 & 6 & 9 \\ 1 & 5 & 8 \\ 0 & 10 & 16 \end{array}\right|_{L_2 = L_2 - L_1} \\
&= -\left|\begin{array}{ccc} 1 & 6 & 9 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 10 & 16 \end{array}\right|_{L_3 = L_3 + 10L_2} \\
&= -\left|\begin{array}{ccc} 1 & 6 & 9 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{array}\right| = 6
\end{aligned}$$

Logo, $\det(\mathbf{A})$ é múltiplo de 6.

■

Exercício 17.

Confirme as seguintes igualdades:

1. $\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{array}\right| = (b-a)(c-a)(c-b)$

2. $\left|\begin{array}{cc} (na+b) & (nc+d) \\ (nb+a) & (nd+c) \end{array}\right| = (n^2-1)\left|\begin{array}{cc} a & c \\ b & d \end{array}\right|$

3. $\left|\begin{array}{ccc} (x+1) & 2 & 0 \\ 4 & x & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right| = 2x-2$

4. $\left|\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 6 & 6 & \cdots & 2n \\ 3 & 6 & 12 & \cdots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 2n & 3n & \cdots & (n^2+n) \end{array}\right| = n!$

5. $\left|\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ a & -b & -c & -d \\ a & b & -c & -d \\ a & b & c & -d \end{array}\right| = -8abcd$

6. $\left|\begin{array}{cccc} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{array}\right| = 2a-b-c-d$

7. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{vmatrix} = (n-1)!$

Resolução.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}_{\substack{L_2=L_2-aL_1 \\ L_3=L_3-aL_2}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & (b-a) & (c-a) \\ 0 & (b^2-ab) & (c^2-ca) \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & (b-a) & (c-a) \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix}_{L_3=L_3-bL_2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & (b-a) & (c-a) \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) \end{vmatrix}$

$= (b-a)(c-a)(c-b)$

Nota: este determinante poderia ser mais facilmente calculado aplicando conjuntamente as propriedades dos determinantes e o Teorema de Laplace. Assim,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}_{\substack{L_2=L_2-aL_1 \\ L_3=L_3-aL_2}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & (b-a) & (c-a) \\ 0 & (b^2-ab) & (c^2-ca) \end{vmatrix}$$

aplicando o Teorema de Laplace à 1ª linha obtém-se

$$= \begin{vmatrix} (b-a) & (c-a) \\ b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix}$$

colocando em evidência $(b-a)$ na 1ª coluna, e $(c-a)$ na 2ª coluna resulta em

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

2. Decompondo a 1ª coluna em dois determinantes

$$\begin{vmatrix} (na+b) & (nc+d) \\ (nb+a) & (nd+c) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} na & (nc+d) \\ nb & (nd+c) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & (nc+d) \\ a & (nd+c) \end{vmatrix}$$

repetindo para a 2ª coluna obtêm-se quatro novos determinantes, sendo possível colocar n em evidência nos três primeiros, permitindo, assim, a sua simplificação de modo a obter o valor pretendido

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} na & nc \\ nb & nd \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} na & d \\ nb & c \end{vmatrix}}_{} + \underbrace{\begin{vmatrix} b & nc \\ a & nd \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & d \\ a & c \end{vmatrix}}_{} =$$

$$= n \times n \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} + \underbrace{n\begin{vmatrix} a & d \\ b & c \end{vmatrix} + n\begin{vmatrix} b & c \\ a & d \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} b & d \\ a & c \end{vmatrix} =$$

$$= n^2 \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = (n^2-1)\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

3. $$\begin{vmatrix} (x+1) & 2 & 0 \\ 4 & x & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}_{C_1 \leftrightarrow C_3} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & (x+1) \\ -1 & x & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}_{L_1 \leftrightarrow L_2} =$$

$$= +\begin{vmatrix} -1 & x & 4 \\ 0 & 2 & (x+1) \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}_{L_3 = L_3 - L_2} = \begin{vmatrix} -1 & x & 4 \\ 0 & 2 & (x+1) \\ 0 & 0 & (1-x) \end{vmatrix} = 2x - 2$$

4. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 6 & 6 & \cdots & 2n \\ 3 & 6 & 12 & \cdots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 2n & 3n & \cdots & (n^2+n) \end{vmatrix}_{\substack{L_2 = L_2 - 2L_1 \\ L_3 = L_3 - 3L_1 \\ \vdots \\ L_n = L_n - nL_1}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n = n!$$

5. $$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & -b & -c & -d \\ a & b & -c & -d \\ a & b & c & -d \end{vmatrix}_{\substack{L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 - L_1 \\ L_4 = L_4 - L_1}} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & -2b & -2c & -2d \\ 0 & 0 & -2c & -2d \\ 0 & 0 & 0 & -2d \end{vmatrix} = -8abcd$$

6. $$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}_{C_1 \leftrightarrow C_4} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 1 & d \end{vmatrix}_{\substack{L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 - L_1}} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 0 & (b-a) \\ 0 & 0 & -1 & (c-a) \\ 0 & 1 & 1 & d \end{vmatrix}_{L_4 = L_4 + L_1} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 0 & (b-a) \\ 0 & 0 & -1 & (c-a) \\ 0 & 0 & 1 & (d+b-a) \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 0 & (b-a) \\ 0 & 0 & -1 & (c-a) \\ 0 & 0 & 0 & (d+b+c-a-a) \end{vmatrix} = 2a - b - c - d$$

7. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{vmatrix}_{\substack{L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 - L_1 \\ \vdots \\ L_n = L_n - L_1}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-1) \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \times 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) = (n-1)!$$

■

Exercício 18.

Sendo $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & -x \\ x & -1 & -x \\ x & 7x & -1 \end{vmatrix}$ mostre que $f(1) = 0$

Resolução.

O que se pretende é mostrar que $x = 1$ é solução da equação $\det(\mathbf{A}) = 0$.

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & x & -x \\ x & -1 & -x \\ x & 7x & -1 \end{vmatrix}_{C_1 = C_1 + C_3} = \begin{vmatrix} (-x+1) & x & -x \\ 0 & -1 & -x \\ (x-1) & 7x & -1 \end{vmatrix}_{L_3 = L_3 + L_1}$$

$$= \begin{vmatrix} (-x+1) & x & -x \\ 0 & -1 & -x \\ 0 & 8x & (-1-x) \end{vmatrix}, \text{ aplicando o TL à } 1^{\text{a}} \text{ coluna obtém-se}$$

$$= (-x+1) \begin{vmatrix} -1 & -x \\ 8x & (-1-x) \end{vmatrix} = (-x+1)\left(1 + x + 8x^2\right)$$

Da equação $\det(\mathbf{A}) = 0$, conclui-se que a única solução é $x = 1$.

Uma verificação rápida da veracidade da solução consiste em substituir no determinante inicial a variável x pelo valor 1. Assim, ter-se-á

$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 0$, pois $\det(\mathbf{A})$ tem as colunas 1 e 3 proporcionais.

Exercício 19.

Sejam $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ e $\det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$. Sem calcular nenhum dos seguintes determinantes, represente um determinante de $\det(\mathbf{C})$ tal que $\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$.

Resolução.

Fixe-se $\det(\mathbf{A})$ e opere-se em $\det(\mathbf{B})$ até encontrar 2 filas (linhas ou colunas) iguais a $\det(\mathbf{A})$

$$\det(\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}_{\det(\mathbf{B})}$$

$$\det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}_{\text{transpondo}} = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}_{L_1 \leftrightarrow L_2} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}_{L_2 \leftrightarrow L_3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

como $\det(\mathbf{B})$ tem, agora, apenas uma linha diferente de $\det(\mathbf{A})$, então já se podem adicionar

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

■

Exercício 20.

Considere as matrizes $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$. Determine:

1. A matriz inversa $\mathbf{A}^{-1}$, pelo método da condensação.
2. A matriz inversa $\mathbf{B}^{-1}$, pelo método da condensação.

Resolução.

1.

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{L_2 \leftrightarrow L_1} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{\substack{L_2 = L_2 - 2L_1 \\ L_3 = L_3 + L_1}} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]_{L_2 \leftrightarrow L_3} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]_{\substack{L_1 = L_1 + L_2 \\ L_3 = L_3 - 4L_2}} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -6 & -4 \end{array}\right]_{L_3 = \frac{1}{3} L_3} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -2 & -\frac{4}{3} \end{array}\right]$$

$$\therefore \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & -2 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

2.
$$[\mathbf{B}\,|\,\mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2 = L_2 - 2L_1 \\ L_3 = L_3 - L_1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3 = L_3 - 2L_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3 = -L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3 = L_3 + 3L_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & 7 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 = L_1 - 3L_3 \\ L_2 = L_2 - L_3 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 34 & -21 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & 7 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_1 = L_1 - 4L_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & 7 & -3 \end{array}\right]$$

$$\therefore \quad \mathbf{B}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 1 \\ 8 & -5 & 2 \\ -11 & 7 & -3 \end{array}\right]$$

■

Exercício 21.

Considere as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ do exercício anterior. Resolva a equação matricial $\left[\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1}\mathbf{X}\right]^T + (\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{A}$, indicando as propriedades utilizadas em cada etapa da resolução.

Resolução.

Como as duas matrizes são regulares, admitem elemento inverso, isto é, têm matriz inversa. Assim, subtraindo-se $(\mathbf{AB})^{-1}$ a ambos os membros, obtém-se a equação

$$\left[\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1}\mathbf{X}\right]^T = \mathbf{A} - (\mathbf{A}\,\mathbf{B})^{-1}$$

como a inversa do produto de matrizes é igual ao produto, por ordem inversa, das inversas das matrizes, ter-se-á

$$\left[\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1}\mathbf{X}\right]^T = \mathbf{A} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

como a transposta do produto de matrizes é igual ao produto, por ordem inversa, das transpostas das matrizes, ter-se-á

$$\mathbf{X}^T\left[\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1}\right]^T = \mathbf{A} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

como $\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T$, ter-se-á

$$\mathbf{X}^T\left[\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T\right]^T = \mathbf{A} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

como a transposta da transposta de uma matriz é a própria matriz, ter-se-á

$$\mathbf{X}^T\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

Multiplicando à direita ambos os membros da equação por $\mathbf{A}$, ter-se-á

$$\left(\mathbf{X}^T\mathbf{A}^{-1}\right)\mathbf{A} = \left[\mathbf{A} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\right]\mathbf{A}$$

simplificando esta equação através da propriedade associativa e da propriedade distributiva à esquerda, no 1º e 2º membros, respetivamente, ter-se-á

$$\mathbf{X}^T\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\right) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$$

como $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$, ter-se-á

$$\mathbf{X}^T\left(\mathbf{I}\right) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{I}$$

como $\mathbf{A}\,\mathbf{I} = \mathbf{A}$, ter-se-á

$$\mathbf{X}^T = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^{-1}$$

transpondo ambos os membros da equação, obtém-se finalmente a matriz $\mathbf{X}$

$$\mathbf{X} = \left[\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^{-1}\right]^T$$

como a transposta da soma (ou diferença) de matrizes é igual à soma (ou diferença) das transpostas de cada uma das matrizes, ter-se-á

$$\mathbf{X} = \left[\mathbf{A}^2\right]^T - \left[\mathbf{B}^{-1}\right]^T$$

concretizando, ter-se-á

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 6 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\left[\mathbf{A}^2\right]^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & -4 \\ 6 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{B}^{-1}]^T = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -11 \\ -1 & -5 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

pelo que

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & -4 \\ 6 & 3 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 8 & -11 \\ -1 & -5 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 11 \\ 9 & 8 & -11 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

■

2.12.1. Exercícios resolvidos em MATLAB

Exercício 22.

Defina, no MATLAB,

1. O vetor coluna **x** formado por números pares com início em 4 e término em 100.
2. O vetor coluna **y** constituído por uma sequência decrescente de números inteiros com início em 5 e término em -3.
3. O vetor coluna **z** constituído por múltiplos de 3 compreendidos entre 3 e 132.

Resolução.

SCRIPT MATLAB 2.1

```
>> x = 4:2:100
>> y = 5:-1:-3
>> z = 3:3:132
```

■

Exercício 23.

Defina, no MATLAB,

1. Uma matriz **A** de ordem 4 com todos os elementos iguais a 2.
2. Uma matriz **D** diagonal, de ordem 4, com todos os elementos iguais a 4.
3. Uma matriz **T** triangular superior, de ordem 4, com os elementos da diagonal iguais a 1 e os restantes elementos não nulos iguais a 2.

Resolução.

SCRIPT MATLAB 2.2

```
>> A = 2*ones(4)
>> D = 4*eye(4)
>> T = triu(2*ones(4)-eye(4))
```

■

Exercício 24.

Considere uma matriz aleatória **A** de ordem 6×5 e determine

1. O maior elemento de cada linha da matriz
2. O maior elemento de cada coluna da matriz
3. A média dos elementos de cada coluna
4. O traço da matriz **A**
5. O determinante da matriz que contém as primeiras 5 linhas de **A**
6. A inversa da matriz que contém as primeiras 5 linhas de **A**

Resolução.

A matriz **A** pode ser gerada utilizando a função `rand`

- maxlinha - vetor em que o elemento na posição i corresponde ao maior elemento dessa linha da matriz A
  - maxcoluna – vetor em que o elemento na posição i corresponde ao maior elemento dessa coluna da matriz A;
  - mediacoluna – vetor em que o elemento na posição i corresponde à média dos elementos dessa coluna da matriz A;
  - B – matriz que contém as primeiras 5 linhas de A;
  - Tr – traço da matriz;
  - D – determinante da matriz.
  - invB – inversa da matriz que contém as primeiras 5 linhas de A;

O *script* será

SCRIPT MATLAB 2.3

```
>> A = rand(6,5)
>> maxlinha = max(A')
>> maxcoluna = max(A)
>> mediacoluna = mean(A)
>> B = A(1:5, :);
>> Tr = trace(B)
>> D = det(B)
>> invB=inv(B)
```

■

Exercício 25.

Gerar uma matriz mágica de ordem 4, isto é, uma matriz de inteiros em que a soma dos elementos das linhas, das colunas e das diagonais seja sempre igual.

Resolução.

SCRIPT MATLAB 2.4

```
>> magic(4)
```

■

Exercício 26.

Considere a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 2 & -1 \\ a & a & 2 & 4 \\ a & a & a & -1 \\ a & a & a & a \end{bmatrix}$

1. Determine a característica da matriz para $a = 1$
2. Resolva a equação $\det(\mathbf{A}) = 0$

Resolução.

Sendo

c - característica da matriz para $a = 1$;

x - soluções da equação $\det(\mathbf{A}) = 0$

SCRIPT MATLAB 2.5

```
>> syms a;
>> A=[a,1,2,-1;a,a,2,4;a,a,a,-1;a,a,a,a];
>> B=subs(A,a,1);
>> c = rank(B)
>> x=solve(det(A))
```

■

2.13. Exercícios propostos

2.13.1. Exercícios relativos a operações algébricas com matrizes

1. Considere a matriz identidade, $\mathbf{I}$, a matriz nula, $\mathbf{0}$, e as seguintes matrizes

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix}$ $\quad$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad$ $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\quad$ $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ $\quad$ $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

a) identifique os elementos das respetivas matrizes a_{12}, b_{11}, c_{21}, d_{22}, j_{23} e k_{32}

b) encontre os valores de a, b, c e $d \in \mathbb{R}$ que tornam verdadeira a igualdade

$$\begin{bmatrix} (2a+b+d) & (2b+2c+d) \\ (a+b+c) & (a+b-c+d) \end{bmatrix} = \mathbf{H}$$

c) calcule, sempre que possível,

i. $\mathbf{C}+\mathbf{D}$ ii. $4\mathbf{D}-3\mathbf{F}$ iii. $4\mathbf{G}-2\mathbf{H}+\mathbf{RM}$

iv. $2\mathbf{I}+5\mathbf{J}-\mathbf{K}$ v. $\mathbf{AC}$ vi. $\mathbf{AQ}$

vii. $-\mathbf{GS}+2\mathbf{R}$ vii. $\mathbf{KL}$ ix. $\mathbf{KLD}-\mathbf{F}$

x. $\mathrm{L}\cdot 2\mathbf{M}$ xi. $\mathbf{NP}+2\mathbf{G}$ xii. $\mathbf{CB}+\mathbf{GH}$

xiii. $\mathbf{B}(\mathbf{G}+\mathbf{H})$ xiv. $(3\mathbf{I}-\mathbf{J})\mathbf{D}$ xv. $\mathbf{J}^2-3\mathbf{J}$

xvi. $\mathbf{G}^0+\mathbf{G}^3$ xvii. $-3\mathbf{H}^2+\mathbf{G}+\mathbf{I}$

d) encontre o valor de $a \in \mathbb{R}$ que satisfaz a igualdade $\mathbf{E}^2 = 3\mathbf{E}-2\mathbf{I}$

e) verifique as propriedades da adição de matrizes e da multiplicação de um escalar por uma matriz, representadas nas seguintes igualdades, calculando

i. $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$

ii. $\mathbf{I}+(\mathbf{J}+\mathbf{K})=(\mathbf{I}+\mathbf{J})+\mathbf{K}$

iii. $\mathbf{A}+0=0+\mathbf{A}=\mathbf{A}$

iv. $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = (-\mathbf{A}) - \mathbf{A} = \mathbf{0}$

v. $(2+4)\mathbf{M} = 2\mathbf{M} + 4\mathbf{M}$

vi. $2(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 2\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$

vii. $3(-2\mathbf{A}) = -6\mathbf{A}$

viii. $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$

f) verifique as propriedades do produto de matrizes, representadas nas seguintes igualdades, calculando

i. $(\mathbf{JK})\mathbf{L} = \mathbf{J}(\mathbf{KL})$

ii. $(\mathbf{J} + \mathbf{K})\mathbf{L} = \mathbf{JL} + \mathbf{KL}$

iii. $\mathbf{J}(\mathbf{K} + \mathbf{L}) = \mathbf{JK} + \mathbf{JL}$

iv. $\mathbf{K0} = \mathbf{0K} = \mathbf{0}$

v. $\mathbf{ZW} = \mathbf{0}$

vi. $\mathbf{YI} = \mathbf{IY} = \mathbf{Y}$

vii. $\mathbf{AC} \neq \mathbf{CA}$

viii. $\mathbf{GH} \neq \mathbf{HG}$

ix. $\mathbf{TU} = \mathbf{UT}$

g) verifique as propriedades da transposta de matrizes, representadas nas seguintes igualdades, calculando:

i. $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$

ii. $(\mathbf{D} + \mathbf{F})^T = \mathbf{D}^T + \mathbf{F}^T$

iii. $(3\mathbf{J})^T = 3\mathbf{J}^T$

iv. $(\mathbf{GH})^T = \mathbf{H}^T\mathbf{G}^T$

h) encontre a matriz $\mathbf{X}$ que satisfaz as seguintes igualdades

i. $\mathbf{J}^T\mathbf{K} + \mathbf{XI} = \mathbf{0}$

ii. $(2\mathbf{CB} - \mathbf{G} + \mathbf{X})^T = \mathbf{I}$

iii. $(\mathbf{QP})^T\mathbf{G}^2 = \mathbf{X} - 3\mathbf{I}$

2. Indique, justificando, o valor lógico da seguinte afirmação

"$(\mathbf{ABC})^T$ representa uma matriz real 3×1, onde $\mathbf{A}$ é uma matriz real 3×3, $\mathbf{B}$ é uma matriz real 3×2 e $\mathbf{C}$ uma matriz real 2×1".

3. Considere a matriz identidade, $\mathbf{I}$, e a matriz nula, $\mathbf{0}$. Dê exemplos de matrizes reais do tipo 2×2 que satisfaçam as seguintes igualdades

a) $\mathbf{A} = ?$, sendo $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$ e $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$

b) $\mathbf{B} = ?$, sendo $\mathbf{B}^2 = -\mathbf{I}$ e todas as componentes de $\mathbf{B}$ diferentes de zero

c) $\mathbf{C} = ?$, sendo $\mathbf{C}^2 = \mathbf{0}$ e $\mathbf{C} \neq \mathbf{0}$

d) $\mathbf{D} = ?$ e $\mathbf{E} = ?$, sendo $\mathbf{DE} = \mathbf{0}$ e todas as componentes de $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ diferentes de zero

Sugestão: considere $\mathbf{D}$ uma matriz com elementos iguais em cada linha e com as linhas proporcionais entre si

e) $\mathbf{F} = ?$, sendo $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{F} \neq \mathbf{I}$, tal que $\mathbf{FM} = \mathbf{MF}$

f) $\mathbf{G} = ?$, sendo $\mathbf{G} = \sqrt{\mathbf{H}}$, com $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. Sendo A e B matrizes reais, diga em que condições são válidas as seguintes igualdades

a) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$

b) $\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 = (\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}-\mathbf{B})$

c) $\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{B}^{-1}$

d) $(\mathbf{AB})^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$

5. Dê exemplos de matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ reais do tipo 3×3 que verifiquem as seguintes afirmações

a) "se $\mathbf{A}$ tem apenas uma linha de zeros e $\mathbf{B}$ não tem elementos nulos, então $\mathbf{AB}$ tem essa linha de zeros";

b) "se $\mathbf{B}$ tem apenas uma coluna de zeros e $\mathbf{A}$ não tem elementos nulos, então $\mathbf{AB}$ tem essa coluna de zeros";

c) "a soma e o produto de matrizes diagonais é uma matriz diagonal";

d) "a soma e o produto de matrizes escalares é uma matriz escalar";

e) "a soma e o produto de matrizes triangulares superiores é uma matriz triangular superior";

f) "a soma e o produto de matrizes triangulares inferiores é uma matriz triangular inferior".

6. Encontre as matrizes reais $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ que satisfazem os seguintes sistemas

a) $\begin{cases} 2\mathbf{X} - \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 0 & -11 & 2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{X} + \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \mathbf{Y}^T + \mathbf{ABA} = 0 \\ (\mathbf{BA} - 2\mathbf{I})\mathbf{X} - \mathbf{YA} = 0 \end{cases}$ com $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

7. Sabendo que $\mathbf{A}^k$ é o produto de uma matriz real quadrada $\mathbf{A}$ por si própria k vezes, por exemplo, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA}$, deduza

a) $\mathbf{A}^n$, para $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{A}^n$, para $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{A}^n$, para $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\mathbf{A}^n$, para $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

e) $\mathbf{A}^n$, para $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

f) $\mathbf{A}^n$, para $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$

8. Dadas as matrizes $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & 1 & b \\ 1 & c & -8 \end{bmatrix}$, determine a, b, $c \in \mathbb{R}$ de modo que a matriz $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ seja simétrica.

9. Verifique que duas quaisquer matrizes da forma $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ são permutáveis, onde a e b são dois números reais.

10. Considere a matriz $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ e

    a) calcule $\mathbf{M}^2$. Verifique que $\mathbf{M}^2 = \lambda\mathbf{M}$;

    b) calcule $\mathbf{M}^3$ e $\mathbf{M}^4$ em função de λ e $\mathbf{M}$;

    c) deduza da alínea anterior a expressão genérica de $\mathbf{M}^n$.

11. Deduza $\mathbf{A}^n$, sendo $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

12. Uma matriz quadrada diz-se idempotente se $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$. Mostre que

    a) a matriz $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ é idempotente.

    b) se $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{A}$ e $\mathbf{B} \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$, então $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são idempotentes.

13. Mostre que $\mathbf{A} \times \mathbf{A}^T$ e $\mathbf{A}^T \times \mathbf{A}$ são expressões com significado qualquer que seja a ordem da matriz $\mathbf{A}$.

14. Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ duas matrizes quadradas de ordem n simétricas. Prove que $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ é simétrica se e só se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são permutáveis (aplique as propriedades da transposição).

15. Considere as seguintes matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & k \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ y & 3 \end{bmatrix},$$

e determine

    a) a matriz $\mathbf{M}$, tal que $\mathbf{M} = 2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}$;

    b) a matriz $\mathbf{X}$, tal que $\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{B}^T + 3\mathbf{I} - \mathbf{C}$;

c) o valor do escalar k, tal que $\mathbf{DE} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$;

d) o valor dos escalares x e y, tais que $\mathbf{F}^2 + \mathbf{F} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -10 & 9 \end{bmatrix}$.

16. Considere as seguintes matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e determine:

a) a matriz $\mathbf{M}$, tal que $\mathbf{M} = 2\mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{C}^T\mathbf{D}^T + 2\mathbf{I}$;

b) a característica da matriz $\mathbf{N}$, tal que $\mathbf{N} = \mathbf{AB} + \mathbf{DC}$;

c) a característica da matriz $\mathbf{P}$, tal que $\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}^2 - \mathbf{I}$, sendo $\mathbf{Q} = \mathbf{CD}$.

17. Considere $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e encontre $f(\mathbf{A})$, sendo $f(x) = -3x^3 + 2x - 4$

18. Escreva as matrizes transposta, conjugada e transconjugada da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1+i & 3i \\ 1-2i & 0 & 2+2i \\ i & 3-i & 5i \end{bmatrix}$$

19. Considere a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -i & i & 3i \\ 0 & 0 & 2+2i \\ i & 3+5i & 1-4i \end{bmatrix}$ e verifique que

a) $\left(\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}$

b) $\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}$

c) $(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}$

d) $\left(\mathbf{A}^T\right)^* = (\mathbf{A}^*)^T$

20. Considere a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ i & 2 & 1 \\ 3 & -i & i \end{bmatrix}$ e determine

a) a sua transposta, $\mathbf{A}^T$

b) a sua simétrica, $-\mathbf{A}$

2.13.2. Exercícios relativos à condensação e característica de uma matriz

1. Utilizando o método da condensação, determine a característica de cada uma das seguintes matrizes

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & -10 & -6 \end{bmatrix}$

2. Utilizando o método da condensação, discuta, em função dos parâmetros reais a e b, o valor da característica de cada uma das seguintes matrizes

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & a \\ 3 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & a & 2 \\ 1 & 2 & b \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -b & a \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & (a+b) \end{bmatrix}$

d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & a & 4 \\ 4 & a & 4 & 4 \\ 4 & b & b^2 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & a \end{bmatrix}$

e) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & b & a \\ 1 & a & b & c \\ 1 & a & 1 & 1 \end{bmatrix}$

f) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & (a-2) & (a-1) \\ (2a-1) & (a-1) & (2a-1) \\ (a-2) & (a-2) & (2a-1) \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}$

g) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & (a+1) & 2 & 1 \\ 1 & 2 & (a+1) & 1 \\ 1 & 2 & (b^2+1) & b \\ 1 & 2 & 2 & a \end{bmatrix}$

2.13.3. Exercícios relativos a determinantes

1. Demonstre as seguintes propriedades dos determinantes

   a) *Se num determinante forem trocadas ordenadamente as linhas pelas colunas, o valor do determinante não se altera, isto é,* $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$;

   b) *Um determinante é nulo se possuir uma fila (linha ou coluna) de elementos*

todos nulos;

c) *Se, num determinante, forem trocadas duas filas paralelas, este terá valor simétrico do valor do determinante original*;

d) *Se, num determinante, uma fila for multiplicada (ou dividida) por um escalar α não nulo, o determinante tem como valor o produto (ou quociente) de α pelo determinante inicial*;

e) *Se, num determinante, duas ou mais filas são iguais ou proporcionais, o determinante é nulo*;

f) *Se, num determinante, os elementos de uma fila são somas algébricas de n parcelas, o determinante pode decompor-se na soma de n determinantes, onde apenas se altera a fila que se decompõe e se mantêm inalteradas as restantes filas*;

g) *O valor de um determinante não se altera quando, aos elementos de uma fila, se adicionam os elementos correspondentes a outra ou outras filas paralelas multiplicadas por um escalar α não nulo*;

h) *Os determinantes de uma matriz diagonal e de uma matriz triangular têm como valor o produto dos elementos das suas diagonais.*

2. Aplicando as propriedades dos determinantes, calcule

a) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

b) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$

c) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

d) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 16 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix}$

e) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}$

f) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

g) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

h) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

i) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

j) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

k) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 5 & 3 \\ 6 & 2 & -1 & -5 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

l) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$

3. Considere $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e verifique, aplicando as propriedades dos determinantes, que $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$

4. Sendo $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ calcule

   a) o menor complementar dos elementos a_{13} e a_{32}

   b) os complementos algébricos dos elementos a_{21} e a_{22}

5. Aplicando o Teorema de Laplace à fila mais conveniente, calcule

(a) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ (b) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(c) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

6. Considere $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ e indique

   a) um determinante $\det(\mathbf{B})$, de $5^{\underline{a}}$ ordem e sem elementos nulos, cujo valor seja simétrico a $\det(\mathbf{A})$

   b) um determinante $\det(\mathbf{B})$, de $3^{\underline{a}}$ ordem com os elementos da $2^{\underline{a}}$ linha todos iguais a -1, cujo valor seja duplo de $\det(\mathbf{A})$

   c) dois determinantes $\det(\mathbf{B})$ e $\det(\mathbf{C})$, ambos de $4^{\underline{a}}$ ordem e sem elementos nulos, tais que $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B}) + \det(\mathbf{C})$

7. Considere as matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$\mathbf{P} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, sendo $\mathbf{P}$ uma matriz invertível.

Usando as propriedades dos determinantes, calcule

   a) $\det(\mathbf{A})$

   b) $\det(\mathbf{B})$

   c) $\det(\mathbf{C})$

d) $\det(\mathbf{D})$
e) $\det(-2\mathbf{A})$
f) $-2\det(\mathbf{A})$
g) $\det(\mathbf{A}^3)$
h) $2\det(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$
i) $\det(\mathbf{A}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T)$
j) $\det(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A})$
k) $\det(\mathbf{ABCD})$
l) $\det(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})$

8. Sendo a b e c valores reais e aplicando as propriedades dos determinantes, calcule

a) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 2a & (b-2a) & -a \\ -a^2 & b & (b-a) \end{vmatrix}$

b) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 2b & b & b \\ (a+b) & a & b \\ (a+c) & a & b \end{vmatrix}$

c) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} (a+b) & 0 & (a+b) \\ a & (a+b) & b \\ a & b & (a+b) \end{vmatrix}$

d) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & 2b & (a+b+c) & (a+b+c+d) \\ a & 2b & (a+b+2c) & (2a+2b+c+d) \\ a & 2b & (a+b+2c) & (2+2b+c+2d) \end{vmatrix}$

e) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 2b & b & (b-a) \\ (a-b) & -b & 2a \\ (b-a) & a & b \end{vmatrix}$

f) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a & b & a \\ a & a & b \\ b & a & a \end{vmatrix}$

g) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} (a+1) & (b-a) & a^2 \\ (a^2-1) & (a-b) & a \\ (b-a) & 0 & a \end{vmatrix}$

h) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a & b & 1 & 0 \\ a & b & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \end{vmatrix}$

i) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 2 & b & b \\ a & c & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

j) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & a & a & 1 \\ 1 & b & 1 & b \\ 1 & a & b & 1 \\ 1 & b & a & 1 \end{vmatrix}$

k) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a & b & c \\ a & a & a & b \\ a & a & a & a \end{vmatrix}$

l) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & a & 0 & 2 \\ 1 & 0 & a & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

m) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 & 1 \\ a & a & 0 & 1 \\ a & a & a & 0 \end{vmatrix}$

n) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} (a^2+a) & 2a & 2 \\ a & a^2 & 1 \\ a^3 & -a & -1 \end{vmatrix}$

o) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ (a+1) & (b+1) & (c+1) \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

p) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ a^2 & a & 1 \\ a^3 & a & a^2 \end{vmatrix}$

q) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & (a+1) & (a-1) \\ (a+1) & 2 & (a+1) \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix}$

r) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} (a-1) & (1-a) & a \\ -a & a & (a-1) \\ (a+1) & (a-1) & 1 \end{vmatrix}$

s) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \sin^2(a) & \cos^2(a) \\ (1-\sin(a)) & \sin(a) \end{vmatrix}$

t) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \cos(a) & \sin(a) \\ \sin(2a) & \sin(a) \end{vmatrix}$

u) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} i & 1+i \\ 2 & i \end{vmatrix}$

v) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1-i & -1 & 2i \\ i-1 & 2+2i & 1+i \\ -2 & -i & 1 \end{vmatrix}$

w) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

x) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a & (a+b) & c \\ b & a & (a+c) \\ 2a & b & c \end{vmatrix}$

9. Sendo a, b, c e d valores reais e utilizando as propriedades dos determinantes, mostre que

a) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

b) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$

c) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} (1-a) & (a-1) & -a \\ (1-b) & (b-1) & -b \\ -c & (c+1) & (c-1) \end{vmatrix} = b-a$

d) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ 0 & 0 & -1 & a \end{vmatrix} = a^4 + 2a^2 + a + 1$

e) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -b \\ a & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -b & 1 & 0 \end{vmatrix} = b(a-1)(1+ab)$

f) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a & (a-2) & (a+2) & a \\ (a-2) & (a+2) & a & a \\ (a+2) & a & a & (a-2) \\ a & a & (a-2) & (a+2) \end{vmatrix} = -128a$

g) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 & -1 \\ a & a & 2 & 4 \\ a & a & a & -1 \\ a & a & a & a \end{vmatrix} = a(a^2-1)(a-2)$

h) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} -a & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -a & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -a & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -a \end{vmatrix} = (a+2)(a-6)$

i) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & b \\ 1 & (a^2+b^2) & (a+b) \\ -1 & (2b^2-a^2) & 2a \end{vmatrix} = b^3$

10. Verifique que, para os seguintes determinantes hemi-simétricos, se tem

a) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0$

b) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ -6 & 0 & 0 & 2 \\ -5 & 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

11. Sendo a, b, c e d valores reais e utilizando as propriedades dos determinantes, mostre que

a) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix} = 0$

b) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

c) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$

d) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & (a+2b) \\ 2 & 4 & (2a-b) \\ 3 & 6 & c \end{vmatrix} = 0$

e) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} (a+b) & c & 1 \\ (b+c) & a & 1 \\ (c+a) & b & 1 \end{vmatrix} = 0$

12. Sendo a, b, c e d valores reais e utilizando as propriedades dos determinantes, mas sem os calcular, mostre que

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1+2a) & 2 & 3 \\ (4+5a) & 5 & 6 \\ (7+8a) & 8 & 9 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ a & c & b \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} b & 2c & 3a \\ a & 2b & 3c \\ a & 2c & 3b \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ a & c & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & (c-2b) \\ b & c & (a-2c) \\ a & c & (b-2c) \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (a-1) & (b-1) & (c-1) \\ (a^2+a) & (b^2+b) & (c^2+c) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} (a+1) & -2a^2 & 3a \\ (b+1) & -2b^2 & 3b \\ (c+1) & -2c^2 & 3c \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} (a-1) & (b-1) & c-1 \\ 2 & 2 & 2 \\ (a-a^2) & (b-b^2) & (c-c^2) \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

13. Utilizando as propriedades dos determinantes, resolva as seguintes equações em $\mathbb{R}$

a) $\begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 0 & -x & -1 \\ 2 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} 6x & 2 & (2x+4) \\ 5x & 1 & 4 \\ 3x & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & x \\ -2 & x & 1 \\ x & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} 4x & 4 & 4 & 4 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2x & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3x \end{vmatrix} = 0$

e) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & x \\ (x+1) & 1 & 2 & 1 \\ (x+1) & x & (x-1) & 1 \\ 0 & 1 & (x+1) & 0 \end{vmatrix} = 0$

f) $\begin{vmatrix} 0 & (x+1) & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3x & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

g) $\begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ -1 & (2+x) & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & (3+x) & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & (4+x) & 4 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & (5+x) \end{vmatrix} = 0$

14. Construa um determinante sem elementos nulos cujos zeros são
$x = -1 \vee x = 0 \vee x = 2$

15. Sendo $a, b, \cdots, x_1, x_2, \cdots, x_n$ valores reais e utilizando as propriedades dos determinantes, mostre que

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & (1+x_1) & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & (1+x_2) & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (1+x_n) \end{vmatrix} = x_1 x_2 \cdots x_n$

b) $\begin{vmatrix} b & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} & \cdots & -a_{1n} \\ b & 0 & -a_{23} & -a_{24} & \cdots & -a_{2n} \\ b & b & 0 & -a_{34} & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & b & \cdots & -a_{n-1,n} \\ b & b & b & b & \cdots & 0 \end{vmatrix} = b\,(a_{12})\,(a_{13})\cdots(a_{n-1,n})$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & (2+a) & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & (3+a) & 3 & \cdots & 3 \\ 4 & 4 & 4 & (4+a) & \cdots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & n & \cdots & (n+a) \end{vmatrix} = a^{n-1}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & \cdots & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 1$

16. Sendo a, b e c valores reais e considerando $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, utilize as propriedades dos determinantes para obter o valor de cada um dos seguintes determinantes, sem os calcular

a) $\det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 6 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix}$

b) $\det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ (2a+2) & 2b & (2c+1) \\ (a+1) & (b+1) & (c+1) \end{vmatrix}$

c) $\det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} (a-1) & (b-1) & (c-1) \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

d) $\det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ (3a+1) & (3b+2) & (3c+1) \end{vmatrix}$

e) $\det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ (3a+2) & 3b & (3c+1) \\ (a+1) & (b+1) & (b+1) \end{vmatrix}$

f) $\det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} a & 6 & (1+2a) \\ b & 0 & (1+2b) \\ c & 3 & (1+2c) \end{vmatrix}$

17. Sendo a, b e c valores reais e considerando $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$, utilize as propriedades dos determinantes para provar a igualdade $\begin{vmatrix} 0 & a & d & b \\ 0 & c & d & d \\ b & b & a & b \\ b & b & b & b \end{vmatrix} = b(a-b)$

18. Sendo a, b, c e d valores reais e considerando os determinantes
$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 0 & a & 1 & 0 \\ 4 & 1 & b & -2 \\ -2 & a & 1 & 3 \\ 2 & -1 & b & 1 \end{vmatrix}$ e $\det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} (a-c) & 1 & a & -1 \\ a & 5 & (a-2) & 1 \\ 1 & (b-2) & 4 & (b+1) \\ -d & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$
encontre, sem efetuar os cálculos destes determinantes, um determinante $\det(\mathbf{C})$, tal que $\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$.

19. Construa um determinante que represente o polinómio real $x^2 + 3x - 6$.

20. Para que valores de $a \in \mathbb{R}$ se verifica a igualdade
$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a & -2 & -2 \\ a & 4 & -1 \\ a & (a+2) & 1 \end{vmatrix} = 0.$

21. Verifique que $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$ para

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

22. Escreva o determinante que resulte do produto dos seguintes determinantes, sem os calcular individualmente

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

23. Considerando a propriedade dos determinantes $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$, e sabendo que $\det(\mathbf{A}) = -4$, determine

a) $\det(\mathbf{A}^2)$

b) $\det(\mathbf{A}^4)$

c) $\det(\mathbf{A}^{-1})$

24. Sabendo que $\det(\mathbf{A}_{4\times4}) = 3$, determine

a) $\det(2\mathbf{A})$

b) $\det(2\mathbf{A}^{-1})$

c) $\det\left((2\mathbf{A})^{-1}\right)$

25. Sabendo que $\det(\mathbf{A}) = 2$ e $\det(\mathbf{B}) = -3$, determine

a) $\det(\mathbf{AB})$

b) $\det(\mathbf{BA})$

c) $\det(\mathbf{ABA})$

d) $\det(\mathbf{BAB})$

e) $\det(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{BA})$

f) $\det(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1})$

26. Sendo $\mathbf{A}$ uma matriz idempotente, mostre que $|\mathbf{A}| = 0 \vee |\mathbf{A}| = 1$.

2.13.4. Exercícios que envolvem o cálculo da matriz inversa

1. Utilizando o método da condensação, encontre todos os valores reais de a e b para os quais as seguintes matrizes são invertíveis

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & 1 & ab \\ 1 & a & b \\ -b & b & ab^2 \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ -1 & 2 & -a & 2a \\ -1 & 2 & -a & 2 \end{bmatrix}$

d) $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & ab \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & a & 1 & b \end{bmatrix}$

2. Diga se as seguintes matrizes são singulares ou regulares e calcule, quando possível, a sua inversa pelo método da condensação

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 12 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

d) $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

f) $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

g) $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -9 \end{bmatrix}$

h) $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

i) $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

j) $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Considere as matrizes $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, e verifique as propriedades da inversa de uma matriz, representadas nas seguintes igualdades, calculando

   a) $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$

   b) $(2\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}$

   c) $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

   d) $(\mathbf{ABC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

   e) $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$

   f) $\mathbf{A}^{-2} = (\mathbf{A}^2)^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

4. Seja $\mathbf{A}$ uma matriz de ordem 4 com $|\mathbf{A}| = -2$, $\mathbf{C}$ uma matriz de ordem 4 com $|\mathbf{C}| = 2$ e $\mathbf{D}$ uma matriz que se obteve de $\mathbf{C}$ por troca da primeira com a segunda coluna. Calcule o determinante da matriz $\mathbf{CA}^{-1}\mathbf{D}^T$.

5. Sendo $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$, encontre a matriz $\mathbf{X}$ que satisfaz as seguintes igualdades

   a) $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$

   b) $\mathbf{AX} = \mathbf{B}^2 - 2\mathbf{C}$

   c) $\mathbf{AX} = \mathbf{D}$

   d) $(\mathbf{AX} - \mathbf{I})^T = \mathbf{C}$

   e) $\mathbf{XA} = (\mathbf{B} - \mathbf{C})^2$

f) $\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1}\mathbf{X} + (\mathbf{BC})^{-1} = \mathbf{I}$

g) $\left[\mathbf{A}\left(2\mathbf{X} - \mathbf{I}^T\right) - \mathbf{I}\right]^T = (\mathbf{AC})^T$

6. Considere as seguintes matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

e determine a matriz $\mathbf{X}$ tal que $\mathbf{AX} = \mathbf{CB}^T + 2\mathbf{B}^T$.

7. Sem utilizar o método da condensação, determine a matriz $\mathbf{A}^{-1}$, sabendo que

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ verifica a relação $\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A} + \mathbf{I} = \mathbf{0}$

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ verifica a relação $\mathbf{A}^3 - \mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - \mathbf{I} = \mathbf{0}$

8. Uma matriz diz-se simétrica quando verifica a igualdade $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$. Encontre os valores dos escalares reais a, b, c e d, de modo que as seguintes matrizes sejam simétricas

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ a & b \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ b & 5 & -4 \\ -1 & c & d \end{bmatrix}$

9. Uma matriz diz-se ortogonal quando verifica a igualdade $\mathbf{AA}^T = \mathbf{I}$. Mostre que as seguintes matrizes são ortogonais

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$

10. Uma matriz diz-se idempotente quando verifica a igualdade $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$. Mostre que as seguintes matrizes são idempotentes

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{6} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

11. Considere $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ e determine

    a) $\det(\mathbf{X})$, sendo a matriz $\mathbf{X} = [\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}]^T$ e $\det(\mathbf{B}_{3\times 3}) = 6$

    b) $\det(\mathbf{X}^{-1})$, sendo a matriz $\mathbf{X} = 2\mathbf{A}$

    c) $\det(\mathbf{X})$, sendo válida a igualdade matricial $(\mathbf{A}^T)^{-1} = \mathbf{B}\,\mathbf{X}\,\mathbf{B}^{-1}$ e $\det(\mathbf{B}_{3\times 3}) = 2$

    d) $\det(\mathbf{X})$, sendo a matriz $\mathbf{X} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}^T$, $\det(\mathbf{B}_{3\times 3}) = 3$ e $\mathbf{C}$ uma matriz que se obteve da matriz $\mathbf{A}$ por troca da 1ª com a 2ª linha.

12. Mostre que $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$.

13. Determine a derivada do determinante $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \cos(x) & 1 & \frac{1}{x} \\ \ln\left(\frac{x}{4}\right) & 3 & \sqrt{x} \\ \frac{x^2}{3} & 2^x & \tan\left(\frac{x}{2}\right) \end{vmatrix}$.

14. Considere $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & b \\ -1 & a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2b & 1 & -1 & 2a \\ -2 & a & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ a & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ b & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ e encontre os valores reais a e b, tais que $\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}$.

15. Indique, justificando, o valor lógico de cada uma das seguintes proposições.

    a) A expressão matricial $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A})\mathbf{B} - [\mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{A}]^{-1} - \mathbf{B}$ define a matriz nula.

    b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+ka & h+kb & i+kc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & a & b \\ f & d & e \\ i & g & h \end{vmatrix}$, $\quad \forall a, b, \ldots, i, k \in \mathbb{R}$

16. Na codificação de uma mensagem, é usado o seguinte código

A	B	C	...	J	K	L	...	X	W	Y	Z
1	2	3	...	10	11	12	...	23	24	25	26

Neste exercício, o espaço e os acentos não foram considerados. A mensagem foi transformada usando a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

e foi enviada como 32; 44; −33; 17; 22; −18; 60; 83; −69. Qual é a mensagem?

2.14. Soluções dos exercícios propostos

2.14.1. Matrizes

1.

a) $a_{12} = -3$, $b_{11} = 1$, $c_{21} = 5$, d_{22} não existe, $j_{23} = 5$, $k_{32} = 1$

b) $a = \frac{-1}{2}$, $b = -1$, $c = -\frac{3}{2}$, $d = 4$

c)

i. Não é exequível

ii. $\begin{bmatrix} -2 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix}$

iii. $\begin{bmatrix} -4 & 12 \\ 11 & -7 \end{bmatrix}$

iv. $\begin{bmatrix} 13 & 18 & -2 \\ -3 & -1 & 19 \\ 0 & 4 & 16 \end{bmatrix}$

v. $[-17]$

vi. $\begin{bmatrix} 13 & 7 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

vii. $\begin{bmatrix} 3 & -11 & -1 \\ -1 & -23 & 1 \end{bmatrix}$

viii. $\begin{bmatrix} 22 & -6 & 24 \\ 21 & 7 & 37 \\ 12 & -9 & 9 \end{bmatrix}$

ix. $\begin{bmatrix} 80 \\ 147 \\ 17 \end{bmatrix}$

x. $\begin{bmatrix} 28 & 20 \\ 16 & 20 \\ 30 & 30 \end{bmatrix}$

xi. $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 33 \end{bmatrix}$

xii. $\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 5 & 25 \end{bmatrix}$

xiii. $\begin{bmatrix} 3 & 25 \end{bmatrix}$

xiv. $\begin{bmatrix} -8 \\ -8 \\ -3 \end{bmatrix}$

xv. $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 20 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

xvi. $\begin{bmatrix} 26 & 26 \\ 39 & 39 \end{bmatrix}$

xvii. $\begin{bmatrix} -19 & 20 \\ 57 & -54 \end{bmatrix}$

d) $a = 2$

e)

f)

g)

h)

i. $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -19 & -4 & 1 \\ -21 & -9 & -7 \\ -5 & -18 & -27 \end{bmatrix}$

ii. $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -7 & -37 \end{bmatrix}$

iii. $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -57 & -88 \\ 41 & 45 \end{bmatrix}$

2. Proposição falsa

3.

a) Por exemplo, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

b) Por exemplo, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

c) Por exemplo, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

d) Por exemplo, $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 15 & -5 \\ -15 & 5 \end{bmatrix}$

e) $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

f) $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4.

a) Se, e só se, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ forem permutáveis

b) Se, e só se, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ forem permutáveis

c) Se, e só se, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ forem quadradas e da mesma ordem

d) Se, e só se, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ forem permutáveis

5.

a) Por exemplo, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

b) Por exemplo, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

c) Por exemplo, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

d) Por exemplo, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

e) Por exemplo, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

f) Por exemplo, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

6.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \frac{11}{6} & \frac{2}{3} \\ -\frac{7}{6} & \frac{11}{3} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -6 & 7 & -2 \\ 2 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

7.

a) $\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 2^n & 2^{n-1}.3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}$

e) $\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 2.3^{n-1} & 0 & 3^{n-1} \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 2.3^{n-1} & 0 & 3^{n-1} \end{bmatrix}$

f) $\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} \cos(n\alpha) & 0 & \sin(n\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(n\alpha) & 0 & \cos(n\alpha) \end{bmatrix}$

8. Se $a = 17/2, b = 6$ e $c = -15/2$, então a matriz $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 18 & -11/2 & 4 \\ -11/2 & -47/2 & -30 \\ 4 & -30 & -32 \end{bmatrix}$ é uma matriz simétrica.

9.

10.
   a) $\mathbf{M}^2 = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} = 3\mathbf{M}$
   b) $\mathbf{M}^3 = 3^2\mathbf{M}$ e $\mathbf{M}^4 = 3^3\mathbf{M}$
   c) $\mathbf{M}^n = 3^{n-1}\mathbf{M}$

11. $\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

12.

13.

14.

15.
   a) $\begin{bmatrix} -7 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
   b) $\begin{bmatrix} 10 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$
   c) $k = 1$
   d) $x = 1;\ y = -2$

16.
   a) $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$
   b) $\text{car}(\mathbf{N}) = 3$
   c) $\text{car}(\mathbf{P}) = 2$

17. $\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -14 & -22 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 1 & 1-2i & i \\ -1+i & 0 & 3-i \\ 3i & 2+2i & 5i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1-i & -3i \\ 1+2i & 0 & 2-2i \\ -i & 3+i & -5i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1+2i & -i \\ -1-i & 0 & 3+i \\ -3i & 2-2i & -5i \end{bmatrix}$

19.

20.
   a) $\begin{bmatrix} 0 & i & 3 \\ 1 & 2 & -i \\ 0 & 1 & i \end{bmatrix}$
   b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -i & -2 & -1 \\ -3 & i & -i \end{bmatrix}$

2.14.2. Condensação e característica de uma matriz

1.
   a) 2 b) 2 c) 4 d) 3

2.

a) $\text{car}(\mathbf{A}) = 3$ se $a \neq \frac{5}{4}$
$\text{car}(\mathbf{A}) = 2$ se $a = \frac{5}{4}$

b) $\text{car}(\mathbf{A}) = 3$ se $a \neq -2 \wedge b \neq 1$
$\text{car}(\mathbf{A}) = 2$ se $a = -2 \vee b = 1$

c) $\text{car}(\mathbf{A}) = 3$ se $b \neq 1 \wedge a \neq -b$
$\text{car}(\mathbf{A}) = 2$ se $b = 1 \vee a = -b$

d) $\text{car}(\mathbf{A}) = 4$ se $a \neq 4 \wedge b^2 + b - a - 4 \neq 0$
$\text{car}(\mathbf{A}) = 3$ se $a \neq 4 \wedge b^2 + b - a - 4 = 0$
$\text{car}(\mathbf{A}) = 2$ se $a = 4$

e) $\text{car}(\mathbf{A}) = 3$ se $a \neq 1 \wedge b \neq 1 \; \forall \, c$;
se $a \neq 1 \wedge b = 1 \; \wedge c \neq 1$;
se $a = 1 \wedge b \neq 1 \; \wedge c \neq 1$.
$\text{car}(\mathbf{A}) = 2$ se $a \neq 1 \wedge b = 1 \; \wedge c = 1$;
se $a = 1 \wedge b = 1 \; \wedge c \neq 1$;
se $a = 1 \wedge b \neq 1 \; \wedge c = 1$.
$\text{car}(\mathbf{A}) = 1$ se $a = 1 \wedge b = 1 \; \wedge c = 1$.

f) $\text{car}(\mathbf{A}) = 3$ se $a \neq -1 \wedge a \neq 0 \wedge a \neq 1$
$\text{car}(\mathbf{A}) = 2$ se $a = -1 \vee a = 0 \vee a = 1$

g) $\text{car}(\mathbf{A}) = 4$ se $a \neq 1 \wedge a \neq b^2 + b - 1$
$\text{car}(\mathbf{A}) = 3$ se $a = b^2 + b - 1 \wedge a \neq 1$
$\text{car}(\mathbf{A}) = 2$ se $a = 1 \wedge b \neq 1$
$\text{car}(\mathbf{A}) = 1$ se $a = 1 \wedge b = 1$

2.14.3. Determinantes de uma matriz quadrada

1.

a) Sejam $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ e $\mathbf{A}^T = [b_{ij}]$ com $1 \leqslant i \leqslant n$ e $1 \leqslant j \leqslant n$ duas matrizes, onde $b_{ij} = a_{ji}$.

Os determinantes associados a estas matrizes são dados por

$$\det(\mathbf{A}) = \sum(\pm)\, a_{1j_1}\, a_{2j_2} \,\ldots\ldots\, a_{nj_n} \quad (1)$$

$$\det(\mathbf{A}^T) = \sum(\pm)\, b_{1j_1}\, b_{2j_2} \,\ldots\ldots\, b_{nj_n} = (\pm)\, a_{j_1 1}\, a_{j_2 2} \,\ldots\ldots\, a_{j_n n} \quad (2)$$

Reordenando os fatores do termo $a_{j1_1} a_{j2_2} \ldots\ldots a_{jn_n}$ de modo que os índices das linhas estejam ordenados, ter-se-á

$$b\, b_{2j_2} \,\ldots\ldots\, b_{nj_n} = a\, a_{j_{2^2}} \,\ldots\ldots\, a_{j_{n^n}} = (\pm)\, a_{1t_1}\, a_{2t_2} \,\ldots\ldots\, a_{nt_n}$$

Supondo que a permutação $t_1 t_2 \ldots t_n$ que determina o sinal associado a $a_{1t_1}\, a_{2t_2} \,\ldots\ldots\, a_{nt_n}$ e a permutação $j_1 j_2 \ldots j_n$ que determina o sinal associado a $a_{1j_1}\, a_{2j_2} \,\ldots\ldots\, a_{nj_n}$ são ambas pares ou ambas ímpares, isto é, por exemplo,

$$b_{13} b_{24} b_{35} b_{41} b_{52} = a_{31} a_{42} a_{53} a_{14} a_{25} = a_{14} a_{25} a_{31} a_{42} a_{53}$$

(6 inversões) (6 inversões) (6 inversões)

e como os termos e sinal correspondentes em (1) e (2) coincidem, conclui-se

que: $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$.

b) Seja $\mathbf{A} = [a_{ij}]$com $1 \leqslant i \leqslant n$ e $1 \leqslant j \leqslant n$ uma matriz cuja $r - ésima$ linha é formada por zeros.

Como, pela definição, $\det(\mathbf{A}) = \sum(\pm)\, a_{1j_1}\, a_{2j_2} \,\ldots\ldots\, a_{nj_n}$, onde cada termo contém um fator da $r - ésima$ linha, cada termo de $\det(\mathbf{A})$ será nulo, logo $\det(\mathbf{A}) = 0$

c) Demonstração para as linhas (a demonstração para as colunas segue a mesma via)

Sejam $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ e $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ com $1 \leqslant i \leqslant n$ e $1 \leqslant j \leqslant n$ duas matrizes.

Supondo que $\det(\mathbf{B})$ provém de $\det(\mathbf{A})$ devido à troca da posição relativa das linhas r e s de $\mathbf{A}$, em que $r < s$, ter-se-á: $b_{rj} = a_{sj}$, $b_{sj} = a_{rj}$ e $b_{ij} = a_{ij}$ para $i \neq r$ e $i \neq s$, ter-se-á:

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{B}) &= \sum(\pm)\, b_{1j_1}\, b_{2j_2} \,\ldots b_{rj_r} \ldots b_{sj_s} \ldots\, b_{nj_n} \\ &= \sum(\pm)\, a_{1j_1}\, a_{2j_2} \,\ldots a_{sj_r} \cdots a_{rj_s} \ldots\, a_{nj_n} \\ &= \sum(\pm)\, a_{1j_1}\, a_{2j_2} \,\ldots a_{rj_s} \cdots a_{sj_r} \ldots\, a_{nj_n}\end{aligned}$$

a permutação $j_1 j_2 \ldots . j_s \ldots . . j_r \ldots . . j_n$ resulta da permutação $j_1 j_2 \ldots . j_r \ldots . . j_s \ldots . . j_n$ devido à troca da posição de dois números, logo o número de inversões na primeira difere do número de inversões da segunda por uma "quantidade" ímpar. Isto significa que o sinal de cada termo em $\det(\mathbf{B})$ é o negativo do sinal do termo correspondente de $\det(\mathbf{A})$ e assim, $\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$

d) Sejam $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ e $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ com $1 \leqslant i \leqslant n$ e $1 \leqslant j \leqslant n$ duas matrizes.

Se a $r - ésima$ linha da matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ é multiplicada pelo número real $k \neq 0$ para se obter $\mathbf{B} = [b_{ij}]$, então $b_{ij} = a_{ij}$ sse $i \neq r$ e $b_{ij} = k.a_{ij}$ sse $i = r$.

Da definição $\det(\mathbf{A}) = \sum(\pm)\, a_{1j_1}\, a_{2j_2} \,\ldots\ldots\, a_{nj_n}$, obter-se-á

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{B}) &= \sum(\pm)\, b_{1j_1}\, b_{2j_2} \,\ldots\, b_{rj_r} \ldots\, b_{nj_n} \\ &= \sum(\pm)\, a_{1j_1}\, a_{2j_2} \,\ldots\, k.a_{rj_r} \ldots\, a_{nj_n} \\ &= k \,.\, \sum(\pm)\, a_{1j_1}\, a_{2j_2} \,\ldots\, .a_{rj_r} \ldots\, a_{nj_n} \\ &= k \,.\, \det(\mathbf{A})\end{aligned}$$

e) Seja $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ com $1 \leqslant i \leqslant n$ e $1 \leqslant j \leqslant n$ uma matriz.

Suponha-se que as linhas r e s da matriz são iguais.

Se forem trocadas as posições relativas das linhas r e s de $\mathbf{A}$, obtém-se uma matriz $\mathbf{B}$ tal que

$$\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A}) \quad (1)$$

mas, por outro lado, como $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, ter-se-á

$$\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \quad (2)$$

substituindo (2) em (1), ter-se-á:

$$\det(\mathbf{A}) = -\det(\mathbf{A}) \Leftrightarrow 2\det(\mathbf{A}) = 0 \Leftrightarrow \det(\mathbf{A}) = 0$$

Supondo, agora, que r e s não são iguais mas sim proporcionais, pode pôr-

-se em evidência o número múltiplo dessa fila e fica-se na situação que se acabou de demonstrar.

f) Seja $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ com $1 \leqslant i \leqslant n$ e $1 \leqslant j \leqslant n$ uma matriz.

Seja $\det(\mathbf{A}) = \sum(\pm)\, a_{1j_1}\, a_{2j_2} \,\ldots\ldots\, a_{nj_n}$

Se $a_{ij_i} = \underbrace{b_{ij_i}}_{(1)} + \underbrace{b_{ij_i}}_{(2)} + \ldots + \underbrace{b_{ij_i}}_{(m)}$ corresponde a m parcelas, então

$$\det(\mathbf{A}) = \sum(\pm)\, a_{1j_1}\, a_{2j_2} \,\ldots (b_{ij_i} + b_{ij_i} + \ldots b_{ij_i}) \ldots\, a_{nj_n}$$

aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição ter-se-á:

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) = &\sum(\pm)\, a_{1j_1}\, a_{2j_2} \,\ldots b_{ij_i}(1) \ldots\, a_{nj_n} + \\ &+ \sum(\pm)\, a_{1j_1}\, a_{2j_2} \,\ldots b_{ij_i}(2) \ldots\, a_{nj_n} + \ldots\ldots + \\ &+ \sum(\pm)\, a_{1j_1}\, a_{2j_2} \,\ldots b_{ij_i}(m) \ldots\, a_{nj_n}\end{aligned}$$

isto é, $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}_1) + \det(\mathbf{A}_2) + \cdots + \det(\mathbf{A}_m)$

g) Sejam $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ e $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ com $1 \leqslant i \leqslant n$ e $1 \leqslant j \leqslant n$ duas matrizes, onde $b_{ij} = a_{ij}$ *sse* $i \neq r$ e $b_{rj} = a_{rj} + ka_{sj}$ *sse* $r \neq j$, com, por exemplo, $r < s$. Se $\det(\mathbf{B}) =$

$$= \sum(\pm) b_{1j_1} \ldots b_{rj_r} \ldots b_{nj_n} = \sum(\pm) a_{1j_1} \ldots (a_{rj_r} + k.a_{sj_r}) \ldots a_{sj_s} \ldots a_{nj_n}$$

Se se aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, ter-se-á $\det(\mathbf{B}) =$

$$= \sum(\pm) a_{1j_1} \ldots a_{rj_r} \ldots a_{sj_s} \ldots a_{nj_n} + \sum(\pm) a_{1j_1} \ldots k.a_{sj_r} \ldots a_{sj_s} \ldots a_{nj_n}$$

mas, $\sum(\pm) a_{1j_1} \ldots (k.a_{sj_r}) \ldots a_{sj_s} \ldots a_{nj_n} = k \sum(\pm) a_{1j_1} \ldots a_{sj_r} \ldots a_{sj_s} \ldots a_{nj_n}$

ou seja:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots\cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots\cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

como a $r - ésima$ linha é igual à $s - ésima$ linha, então $\det = 0$. Logo, $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) + 0 = \det(\mathbf{A})$

h) Seja $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ com $1 \leqslant i \leqslant n$ e $1 \leqslant j \leqslant n$ uma matriz

Da definição de determinante $\det(\mathbf{A}) = \sum(\pm)\, a_{1j_1}\, a_{2j_2} \,\ldots\ldots\, a_{nj_n}$, sabe-se que o somatório dos termos é feito sobre todas as permutações $j_1 j_2 \ldots\ldots j_n$ do conjunto $S = \{1, 2, \cdots, n\}$ e o sinal de cada termo é positivo ou negativo conforme a permutação $j_1 j_2 \ldots\ldots j_n$ seja par ou ímpar.

Com efeito, se para um dos lados da diagonal principal todos os elementos da matriz são nulos, então todos os termos diferentes do termo principal têm, pelo menos, um fator nulo, logo são termos nulos, logo $\det(\mathbf{A}) =$

$a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$

Outra demonstração:

Seja $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$. Aplicando o Teorema de Laplace à 1ª coluna, ter-se-á

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$ Aplicando, novamente, o teorema à 1ª coluna, ter-se-á

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}.a_{22}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$ Pelo que a iteração do processo conduzirá ao resultado $\det(\mathbf{A}) = a_{11}.a_{22}.a_{33}\cdots a_{nn}$.

2.

a) 3 b) -8 c) -6 d) 3 e) 15 f) 12
g) 12 h) -12 i) 6 j) 100 k) 95 l) 13

3. $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T| = 13$

4.

a) $M_{13} = -1$, $M_{32} = 4$
b) $A_{21} = 1$, $A_{22} = 5$

5.

a) 6 b) 1 c) 11

6.

7.

a) 6 b) 0 c) 0 d) 2 e) -48 f) -12
g) 216 h) 288 i) 0 j) 2 k) 0 l) 6

8.

a) $\det(\mathbf{A}) = a(b-a)(b-a+2)$
b) $\det(\mathbf{A}) = b(b-a)(c-b)$
c) $\det(\mathbf{A}) = 2ab(b+a)$
d) $\det(\mathbf{A}) = abc(d-2a+2)$
e) $\det(\mathbf{A}) = -a(b+a)(2b+a)$
f) $\det(\mathbf{A}) = (b-a)^2(b+2a)$
g) $\det(\mathbf{A}) = a(a+1)(b-2a)(b-a)$
h) $\det(\mathbf{A}) = -(ab+b+a^2+a-1)$
i) $\det(\mathbf{A}) = 2(1-b)(c-1)$

j) $\det(\mathbf{A}) = (1-b)(b-a)^2$
k) $\det(\mathbf{A}) = a(a-b)^3$
l) $\det(\mathbf{A}) = -(4a^2 - 6a + 5)$
m) $\det(\mathbf{A}) = -a(a^2 + a + 1)$
n) $\det(\mathbf{A}) = (1-a)a^2(2a^2 + a + 1)$
o) $\det(\mathbf{A}) = 3(a-b)(c-a)(c-b)$
p) $\det(\mathbf{A}) = (a-1)a^2$
q) $\det(\mathbf{A}) = -(a-2)(a^2 + a + 2)$
r) $\det(\mathbf{A}) = -2a(2a^2 - 2a + 1)$
s) $\det(\mathbf{A}) = \sin^3(a) - \cos^2(a)(1 - \sin(a))$
t) $\det(\mathbf{A}) = -\cos(a)\sin(a)(2\sin(a) - 1)$
u) $\det(\mathbf{A}) = -3 - 2i$
v) $\det(\mathbf{A}) = -5 + 15i$
w) $\det(\mathbf{A}) = -(a-1)^3(a+3)$
x) $\det(\mathbf{A}) = a^2(2a + b + c)$

9.

10.

11.

12.

13.

a) $x = -1 \vee x = 2$
b) $x = 0 \vee x = 2$
c) $x = 1 \vee x = -2$
d) $x = -3 \vee x = 1$
e) $x = 1 \vee x = -2 \vee x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i \vee x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i$
f) $x = \frac{1}{6} \vee x = 1$
g) $x = -6 \vee x = -5 \vee x = -4 \vee x = -3$

14.

15.

16.

a) -6 b) 1 c) 2 d) -6 e) 1 f) 3

17.

18.

19.

20. $a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i \vee a = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i$

21.

22.

a) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 \\ -5 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ b) $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

23.

a) $|A^2| = 16$ b) $|A^4| = 256$ c) $|A^{-1}| = \frac{1}{4}$

24.

a) $2|\mathbf{A}| = 48$ b) $2|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{16}{3}$ c) $|2(\mathbf{A}^{-1})| = \frac{1}{48}$

25.

a) $|\mathbf{AB}| = -6$ b) $|\mathbf{BA}| = -6$ c) $|\mathbf{A}^T\mathbf{BA}| = -12$

d) $|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{AB}| = 2$ e) $|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{BA}| = 2$ f) $|\mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1}| = -\frac{3}{2}$

2.14.4. Cálculo da matriz inversa

1.

a) $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ sse $a \neq 1$

b) $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ sse $a \neq -1 \wedge a \neq 1 \wedge b \neq 0$

c) $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ sse $a \neq 1$

d) $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ sse $a \neq 1 \wedge b \neq 1$

2.

a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

b) Não existe inversa

c) $\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 16 & -3 \\ -5 & 28 & -6 \\ 1 & -5 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} & SS\frac{-1}{5} \\ \frac{-1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}$

e) $\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{13} & -\frac{2}{13} & \frac{9}{26} & \frac{5}{13} \\ \frac{8}{13} & \frac{3}{13} & -\frac{7}{26} & -\frac{1}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{1}{13} & -\frac{3}{26} & \frac{2}{13} \\ -\frac{3}{13} & -\frac{6}{13} & \frac{17}{26} & \frac{15}{13} \end{bmatrix}$

f) $\mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

g) $\mathbf{G}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2} & -1 \\ -8 & \frac{11}{2} & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

h) $\mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

i) $\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$

j) $\mathbf{K}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{7}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3.

4. -2

5.

a) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ b) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$ c) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -7 \\ 11 \end{bmatrix}$

d) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ e) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ f) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

g) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

6. $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -5 & 17 \\ -15 & -35 \\ 5 & 13 \end{bmatrix}$

7.

a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

8.

a) $a = 2, \forall b \in \mathbb{R}$

b) $a = -1, b = 2, c = -4, \forall d \in \mathbb{R}$

9.

10.

11.

a) -2 b) $-\frac{1}{96}$ c) $-\frac{1}{12}$ d) -3

12. $\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \Leftrightarrow \det\left(\mathbf{A}^{-1}\right)\det\left(\mathbf{A}\right) = 1 \Leftrightarrow \det\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\right) = 1 \Leftrightarrow \det\left(\mathbf{I}\right) = 1$

13. $-\left(3\tan\frac{x}{2} - 2^x\sqrt{x}\right)\sin x + \left(\frac{3\sec^2\frac{x}{2}}{2} - 2^x\sqrt{x}\ln 2 - \frac{2^{x-1}}{\sqrt{x}}\right)\cos x +$
$+\frac{5\sqrt{x^3}}{6} - \frac{\tan\frac{x}{2}}{x} - \frac{\ln\frac{x}{4}\sec^2\frac{x}{2}}{2} + \frac{2^x\ln 2\ln\frac{x}{4} + \frac{2^x}{x} - 2x}{x} - \frac{2^x\ln\frac{x}{4} - x^2}{x^2}$

14. $a = 1 \wedge b = -1$

15.

a) Falsa b) Verdadeira

16. ALGA E FIXE

CAPÍTULO

3

Sistemas de Equações Lineares

Uma das mais relevantes utilidades da aplicação dos conceitos do Cálculo Matricial, apresentados no capítulo anterior, reside na resolução de sistemas de equações lineares (abreviadamente, sistemas lineares). O termo "linear" indica que se está a considerar um sistema de equações de grau em cada uma das incógnitas (ou variáveis).

A primeira parte deste capítulo é dedicada à representação matricial de um sistema de equações lineares, à sua classificação com base na análise das características da matriz dos coeficientes das incógnitas do sistema e da matriz completa do sistema e termina com a apresentação dos métodos de resolução de sistemas. A segunda parte deste capítulo é dedicada à discussão de sistemas.

Definição 104. Sistema de equações lineares

Sejam m, n números naturais. Chama-se *sistema* de m equações lineares sobre o corpo $\mathbb{K}$ a n incógnitas a

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3.1}$$

Resolver um sistema de equações lineares corresponde a encontrar uma *solução* de 3.1.

Definição 105. Solução particular e solução geral de um sistema de equações lineares

Qualquer n-úplo ordenado $(k_1, k_2, \cdots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ que verifique a todas as equações do sistema diz-se *solução* ou *solução particular do sistema*. O conjunto de todas as soluções particulares designa-se por *conjunto solução* ou *solução geral do sistema*.

3.1. Representação matricial e notações

A representação matricial do sistema de equações lineares 3.1 é dada por

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

Nesta representação matricial, estão subjacentes as operações entre as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{X}$ e $\mathbf{b}$, das quais resulta a equação matricial 3.2 que, na forma mais compacta, se escreve

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{3.3}$$

onde

$\mathbf{A}$ – corresponde à *matriz dos coeficientes das incógnitas* do sistema;

$\mathbf{x}$ – corresponde à *matriz das incógnitas* do sistema;

$\mathbf{b}$ – corresponde à *matriz dos termos independentes* do sistema.

As matrizes $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$ são matrizes coluna, pelo que são designadas por letras minúsculas a negrito, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$, respetivamente.

A matriz que se obtém a partir da matriz dos coeficientes das incógnitas aumentando-a com a matriz dos termos independentes chama-se *matriz completa (ou aumentada) do sistema*

$$[\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}] \tag{3.4}$$

ou seja

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \tag{3.5}$$

3.2. Classificação de sistemas

Considere as seguintes definições, fundamentais para a classificação e resolução de sistemas de equações lineares:

Definição 106. Sistema homogéneo

Chama-se *sistema homogéneo* a todo o sistema no qual todos os seus termos independentes são nulos, isto é, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Caso contrário, o sistema diz-se *não-homogéneo*. De notar que um sistema homogéneo tem sempre solução (este assunto será abordado mais adiante).

Definição 107. Sistema possível
Diz-se que um *sistema é possível* se tem uma ou mais soluções. Caso contrário, o sistema diz-se *sistema impossível.*

Definição 108. Sistema determinado
Um sistema diz-se *determinado* se tem uma e uma só solução.

Definição 109. Sistema indeterminado
Um sistema diz-se *indeterminado* se tem mais do que uma solução.

A característica da matriz dos coeficientes das incógnitas do sistema, $\mathbf{A}$, pode ser igual ou diferente da característica da matriz completa do sistema, $[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]$, sendo que esta última não pode ser inferior à primeira. A comparação entre os valores das características destas duas matrizes é essencial para a classificação dos sistemas de equações lineares, como o indica o teorema seguinte, que garante a existência ou não de solução.

Teorema 7. *(Teorema de Kronecker-Capelli) Num sistema de equações lineares com* $\text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) \geq \text{car}(\mathbf{A})$, *ter-se-á*

- $\text{car}(\mathbf{A}) \neq \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) \Leftarrow$ sistema impossível;
- $\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) \Leftarrow$ sistema possível.

Neste capítulo, sempre que não suscite dúvidas na sua interpretação, serão utilizadas as abreviaturas seguintes para a classificação[1] de sistemas de equações lineares

$$\text{Sistema de eq. lineares} \begin{cases} \text{Possível} & \begin{cases} \text{Determinado (SPD)} \\ n\text{vezes indeterminado} \quad (\text{SP}n \times \text{ind}) \end{cases} \\ \text{Impossível} \quad (\text{SI}) \end{cases} \tag{3.6}$$

Definição 110. Incógnita principal
Chama-se *incógnita principal* às incógnitas cujas colunas correspondentes são as que têm pivô não nulo na matriz condensada do sistema.

Outra definição importante é o grau de indeterminação de um sistema, necessária quando se está em presença de um sistema possível mas indeterminado. Neste caso, a solução vai relacionar as incógnitas principais do sistema com as restantes incógnitas, havendo necessidade de se determinar o número de incógnitas não principais, ou seja, determinar o *grau de indeterminação do sistema.*

Definição 111. Grau de indeterminação
O grau de indeterminação de um sistema de equações lineares possível corresponde ao número de incógnitas não principais do sistema, obtido a partir de

[1] Convém relembrar que esta classificação de sistemas, na prática, não é assim tão rígida. Quando se trabalha com sistemas de grande dimensão e com coeficientes que nem sempre são números racionais, os erros vão-se acumulando e, por vezes, um mesmo sistema, conforme a precisão com que se está a trabalhar, pode estar numa ou noutra classificação.

$$GI = \text{nº de incógnitas} - \text{car}(\mathbf{A}) \tag{3.7}$$

O grau de indeterminação corresponde ao número mínimo de incógnitas para as quais é necessário especificar valores de forma a poder-se determinar uma solução particular do sistema. Torna-se, então, evidente que o grau de indeterminação de um sistema possível e determinado é nulo, enquanto que para um sistema possível e indeterminado será um número natural inferior ao número de incógnitas do sistema.

3.3. Resolução de sistemas

Os sistemas de equações lineares ocorrem nos mais diversificados domínios, problemas de otimização, aproximação de funções, equações diferenciais, inferência estatística, etc. e conduzem muitas vezes à resolução numérica de sistemas lineares. Em problemas concretos, podem ocorrer sistemas de grandes dimensões (da ordem de centenas ou milhares de equações) cuja resolução obriga à utilização de meios computacionais. Neste contexto, é preferível utilizar métodos abrangentes, que sejam capazes de lidar com sistemas de poucas ou muitas equações e que sejam facilmente implementáveis computacionalmente, viabilizando, assim, a sua utilização em problemas complexos, tais como são a maioria dos problemas que traduzem situações reais em engenharia. Neste contexto, recorre-se ao cálculo matricial, o qual é ideal para aplicar na resolução direta da equação matricial equivalente ao sistema de equações 3.1.

Nas secções seguintes, apresentam-se três métodos de resolução de sistemas com base no cálculo matricial.

3.3.1. O método de eliminação de Gauss

O método de eliminação de Gauss baseia-se na condensação da matriz completa do sistema de equações lineares e consiste em:

1. Condensar a matriz completa do sistema, com base apenas nas linhas (ter em atenção ao facto de que, se for necessário trocar colunas, a troca só é, obviamente, possível na matriz $\mathbf{A}$ e corresponde à troca da posição das incógnitas na matriz associada ao sistema).
2. Comparar a característica da matriz completa do sistema, $\text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}])$, com a característica da matriz dos coeficientes das incógnitas $\text{car}(\mathbf{A})$ e classificar o sistema.
3. Caso o sistema seja possível, determinar a solução do sistema através do método de substituição, iniciando a determinação das incógnitas pela equação de índice de linha mais elevado e evoluindo-se por ordem decrescente das ordens das equações do sistema, substituindo os valores das incógnitas entretanto determinadas em cada uma das equações a resolver.

Exemplo 86.

A resolução do sistema $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$ pelo método de eliminação de Gauss começa com a condensação da matriz completa do sistema

$$[\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 2 \end{array}\right]_{\substack{L_2=L_2-2L_1 \\ L_3=L_3-L_1}} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -7 & -5 & 1 \end{array}\right]_{\substack{L_3=L_3-2L_2 \\ L_2=-L_2}} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \end{array}\right]_{L_3 \leftrightarrow L_2} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right]_{L_3=L_3+3L_2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 4 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 17 \end{array}\right]$$

$$\therefore \left|\begin{array}{l} \mathrm{car}(\mathbf{A}) = \mathrm{car}([\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}]) = 3 \\ n = \text{nº de incógnitas} = 3 \\ GI = n - \mathrm{car}\,(\mathbf{A}) = 0 \end{array}\right.$$

Como as características das matrizes $\mathbf{A}$ e $[\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}]$ são iguais, este sistema é possível. Nestas condições, e sendo o grau de indeterminação nulo, este sistema diz-se possível e determinado. Com base nesta matriz condensada, o sistema reescreve-se

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_2 - x_3 = 5 \\ -x_3 = 17 \end{cases}$$

A determinação do valor de cada incógnita será efetuada começando pela última equação, por ser aquela que permite a obtenção da incógnita de forma mais fácil e, de seguida, passar-se-á à substituição do valor entretanto encontrado na equação anterior, repetindo-se este procedimento até estarem determinadas todas as incógnitas

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3 \times (-17) = 1 \\ -x_2 - (-17) = 5 \\ x_3 = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 4 \times 12 - 51 = 1 \\ x_2 = 12 \\ x_3 = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 12 \\ x_3 = -17 \end{cases}$$

pelo que a solução é $\{(4, 12, -17)\}$.

3.3.2. Resolução de sistemas de equações lineares homogéneos

Definição 112. Sistema homogéneo

Um sistema de equações lineares diz-se *homogéneo* quando os termos independentes de todas as equações são nulos.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \tag{3.8}$$

Este sistema tem como propriedade ser sempre possível, pelo que pode ser classificado em:

1. Sistema possível e determinado, caso a matriz dos coeficientes das incógnitas do sistema seja regular, isto é, caso $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

   Nesta situação, a solução é dita trivial e é dada por $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

2. Sistema possível e indeterminado, caso a matriz dos coeficientes das incógnitas do sistema seja singular, isto é, caso $\det(\mathbf{A}) = 0$.

   Nesta situação, a solução é dita não trivial.

Exemplo 87.

A resolução do sistema homogéneo $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_3 = 0 \\ 7x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ pelo método de eliminação de Gauss parte da condensação da matriz completa do sistema

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 7 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2 = L_2 - \frac{3}{7}L_1 \\ L_3 = L_3 - \frac{4}{7}L_1 \\ L_4 = L_4 - L_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{8}{7} & \frac{10}{7} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{7} & -\frac{10}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_3 = L_3 + L_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{7} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{8} & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\therefore \begin{array}{l} \operatorname{car}(\mathbf{A}) = \operatorname{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 2 \\ n = \text{n.º de incógnitas} = 3 \\ GI = n - \operatorname{car}(\mathbf{A}) = 3 - 2 = 1 \end{array}$$

Como as características das matrizes $\mathbf{A}$ e $[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]$ são iguais, este sistema é um sistema possível. Nestas condições, e sendo o grau de indeterminação igual a um, este sistema diz-se possível e uma vez indeterminado determinado. Com base nesta matriz condensada, o sistema reescreve-se na forma

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 8x_2 - 10x_3 = 0 \end{cases}$$

A determinação do valor de cada incógnita será efetuada pelo procedimento indicado no exemplo anterior, isto é, pelo método de substituição

$$\begin{cases} - - - - - \\ 8x_2 = 10x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x_1 + 2\left(\frac{5}{4}x_3\right) + x_3 = 0 \\ x_2 = \frac{5}{4}x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = \frac{5}{4}x_3 \end{cases}$$

Sendo $x_2 = w$, então a solução é $\left\{\left(-\frac{1}{2}w, \frac{5}{4}w, w\right), w \in \mathbb{R}\right\}$.

3.3.3. Sistemas de Cramer

Definição 113. Sistema de Cramer
Um sistema de n equações lineares a n incógnitas diz-se *sistema de Cramer* se a matriz dos coeficientes das incógnitas, $\mathbf{A}$, for invertível, isto é, se $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Os sistemas de Cramer são sempre possíveis e determinados.

De seguida apresentam-se mais duas formas de resolução destes sistemas:

1. Através do método de Cramer.
2. Através da matriz inversa na resolução da equação matricial associada ao sistema.

O método de Cramer

O método de Cramer consiste num algoritmo de cálculo da solução de sistemas de equações lineares, baseado no quociente de determinantes associados à matriz dos coeficientes das incógnitas do sistema e à matriz dos termos independentes do sistema. A solução de um sistema de Cramer é constituída por uma sequência de valores, onde o valor de cada incógnita x_i é obtido como o quociente de dois determinantes: o determinante do denominador é o determinante da matriz do sistema $\det(\mathbf{A})$, e o determinante do numerador é um determinante $\det(\mathbf{A}_i)$ que se obtém de $\det(\mathbf{A})$ substituindo a coluna dos coeficientes da incógnita x_i pela coluna dos termos independentes do sistema, $\mathbf{b}$. Note-se que, se os termos independentes de um sistema de Cramer forem nulos, isto é, $\mathbf{b} = 0$, então os determinantes $\det(\mathbf{A}_i)$ têm todos uma coluna nula, a coluna dos termos independentes, e, por isso, são todos nulos. Logo, neste caso, tem-se $x_i = 0, \forall i = 1, \ldots, n$ e a solução nula é a única solução. A solução de um sistema é, então, obtida recorrendo à seguinte fórmula, 3.9, dita Regra de Cramer

$$x_i = \frac{\det(\mathbf{A}_i)}{\det(\mathbf{A})},\ i = 1, \cdots, n \tag{3.9}$$

onde

- $\det(\mathbf{A})$ corresponde ao determinante da matriz dos coeficientes das incógnitas do sistema;
- $\det(\mathbf{A}_i)$ corresponde ao determinante associado à variável x_i, e que se obtém a partir do determinante $\det(\mathbf{A})$, substituindo os elementos da coluna i pelos termos independentes do sistema.

Exemplo 88.

Na resolução, pelo método de Cramer, do sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$

é necessário calcular os seguintes determinantes

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \qquad \det(\mathbf{A}_1) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

$$\det(\mathbf{A}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 12 \qquad \det(\mathbf{A}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -17$$

Recorrendo à fórmula de Cramer para obter a solução do sistema, ter-se-á

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\det(\mathbf{A}_1)}{\det(\mathbf{A})} = \frac{4}{1} = 4 \\ x_2 = \frac{\det(\mathbf{A}_2)}{\det(\mathbf{A})} = \frac{12}{1} = 12 \\ x_3 = \frac{\det(\mathbf{A}_3)}{\det(\mathbf{A})} = \frac{-17}{1} = -17 \end{cases}$$

pelo que a solução é $\{(4, 12, -17)\}$.

Utilizando a matriz inversa

Um sistema de Cramer também pode ser resolvido com recurso à matriz inversa na resolução da equação matricial associada ao sistema. Assim, considere-se um sistema de equações lineares dado na forma matricial por $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Como $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, a matriz $\mathbf{A}$ admite inversa, $\mathbf{A}^{-1}$. Neste caso, a equação matricial $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ pode resolver-se em ordem a $\mathbf{x}$, multiplicando à esquerda ambos os membros por $\mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \tag{3.10}$$

Dado que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$, poder-se-á obter a seguinte equação equivalente

$$\mathbf{Ix} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \tag{3.11}$$

Sendo $\mathbf{I}$ o elemento neutro da operação algébrica multiplicação de matrizes, ter-se-á como solução do sistema

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \tag{3.12}$$

Pelo exposto, neste método determina-se a solução de um sistema de Cramer através das operações: inversão da matriz dos coeficientes das incógnitas seguida da sua multiplicação pela matriz coluna termos independentes.

Exemplo 89.

A resolução, com recurso ao cálculo da matriz inversa, do sistema

$$\begin{cases} x_1 + 4\,x + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$

é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

A inversa da matriz dos coeficientes das incógnitas do sistema é

$$[\mathbf{A}\,|\,\mathbf{I}] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{\substack{L_2=L_2-2L_1 \\ L_3=L_3-L_1}} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]_{L_3=L_3-2L_2} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right]_{L_3\leftrightarrow L_2}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]_{L_3=L_3-3L_2} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & 7 & -3 \end{array}\right]_{\substack{L_2=L_2+L_3 \\ L_1=L_1-3L_3}} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 34 & -21 & 9 \\ 0 & -1 & 0 & -8 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & 7 & -3 \end{array}\right]_{\substack{L_2=-L_2 \\ L_1=L_1-4L_2}} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & 7 & -3 \end{array}\right]$$

$$\therefore \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 8 & -5 & 2 \\ -11 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

pelo que a solução do sistema é dada por

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 8 & -5 & 2 \\ -11 & 7 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ -17 \end{bmatrix}$$

3.4. Discussão de sistemas

Por vezes, os coeficientes das incógnitas ou os termos independentes não são todos números reais, mas pelo menos um deles é um parâmetro. Nesse caso, há a necessidade de saber como classificar o sistema para os diversos valores que esse parâmetro possa tomar, isto é, tem de se discutir o sistema.

Numa discussão de sistemas de equações lineares dependentes de um ou de vários parâmetros, pretende-se averiguar todas as possibilidades de solução que esse sistema pode ter. Pelos exemplos anteriormente apresentados neste capítulo, é claro que a determinação do valor das características - da matriz dos coeficientes das incógnitas e da matriz completa do sistema - é fundamental para se proceder à análise e classificação dos sistemas de equações lineares. Neste contexto, esta discussão será efetuada com base nas características destas duas matrizes e, quando aplicável, com base no grau de indeterminação do sistema.

Uma estratégia expedita para a discussão de sistemas de equações lineares dependentes de parâmetros consiste em:

1. condensar a matriz completa do sistema;
2. identificar quais as condições a impor aos parâmetros, de modo que $\text{car}(\mathbf{A})$ seja máxima, comparar com $\text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}])$ obtida nessas condições e classificar o sistema
   a) quando $\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}])$ o sistema é possível,
   b) quando $\text{car}(\mathbf{A}) \neq \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}])$ o sistema é impossível.
3. negar, individualmente, cada uma das condições identificadas para garantir $\text{car}(\mathbf{A})$ máxima e, com base na nova matriz obtida, voltar a identificar quais as condições a impor aos parâmetros, de modo que a nova $\text{car}(\mathbf{A})$ seja máxima, comparar com $\text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}])$ obtida nessas condições e classificar o sistema;
4. repetir o processo até não haver mais condições a negar na $\text{car}(\mathbf{A})$.

Exemplo 90.

Seja o seguinte sistema de equações lineares, em função do parâmetro real a

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 = a \\ x_1 - x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 - ax_2 + x_3 = a \end{cases}$$

A matriz completa deste sistema é

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a \\ 1 & -1 & a & 0 \\ 1 & -a & 1 & a \end{array}\right]$$

Para se discutir as várias possibilidades de classificação deste sistema, dever-se-á condensar a matriz completa do sistema, de modo a determinar as características do sistema em função do parâmetro a

(continuação)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a \\ 1 & -1 & a & 0 \\ 1 & -a & 1 & a \end{array}\right] \underset{\substack{L_2=L_2-L_1 \\ L_3=L_3-L_1}}{} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a \\ 0 & (-1-a) & (a-1) & -a \\ 0 & -2a & 0 & 0 \end{array}\right]_{C_2 \leftrightarrow C_3} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & a & a \\ 0 & \boxed{(a-1)} & (-1-a) & -a \\ 0 & 0 & \boxed{-2a} & 0 \end{array}\right]$$

Tendo a matriz condensada, pode-se, então, analisar os diferentes valores que as características da matriz dos coeficientes e da matriz completa podem tomar em função do parâmetro a. O valor máximo da característica que este sistema pode ter é $\text{car}(\mathbf{A}) = 3$ se $a-1 \neq 0 \wedge -2a \neq 0$. Neste caso, também $\text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 3$, pelo que o sistema é possível. Como $GI = 0$, este sistema diz-se possível e determinado.

Negando a primeira condição, isto é, se $a = 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]_{L_3=L_3-L_2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{C_2 \leftrightarrow C_3} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

O valor máximo que a característica de $\mathbf{A}$ pode tomar é $\text{car}(\mathbf{A}) = 2$. Contudo, neste contexto, $\text{car}(\mathbf{A}) \neq \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 3$, pelo que o sistema é impossível.

Negando a segunda condição, isto é, se $a = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

O valor máximo da característica de $\mathbf{A}$ é $\text{car}(\mathbf{A}) = 2$. Como $\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 2$, o sistema é possível.
Sendo $GI = 1$, este sistema diz-se possível e simplesmente indeterminado.

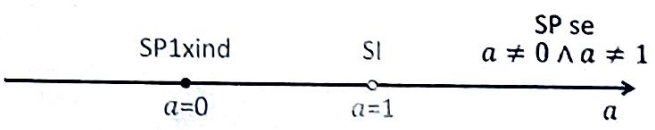


Figura 3.1.: Discussão do sistema em função do parâmetro a.

Em conclusão: este sistema é possível e determinado se $a \neq 0 \wedge a \neq 1$, é impossível se $a = 1$ e é possível e simplesmente indeterminado se $a = 0$.

Exemplo 91.

Seja o seguinte sistema de equações lineares, em função dos parâmetros reais a e b

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ ax_1 + x_2 + (2a-1)x_3 + bx_4 = a \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a \end{cases}.$$

A matriz completa deste sistema é

$$[\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & (2a-1) & b & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{array}\right]$$

Para se discutir as várias possibilidades de classificação deste sistema, dever-se-á condensar a matriz completa do sistema, de modo a determinar as características deste sistema em função dos parâmetros a e b

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & (2a-1) & b & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2 = L_2 - aL_1 \\ L_3 = L_3 - L_1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 1 & 1 & 0 \\ 0 & (1-a^2) & (a-1) & (b-a) & a \\ 0 & (1-a) & 0 & 0 & a \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 1 & 1 & 0 \\ 0 & (1-a)(1+a) & (a-1) & (b-a) & a \\ 0 & (1-a) & 0 & 0 & a \end{array}\right]_{L_2 \leftrightarrow L_3} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 1 & 1 & 0 \\ 0 & (1-a) & 0 & 0 & a \\ 0 & (1-a)(1+a) & (a-1) & (b-a) & a \end{array}\right]_{L_3 = L_3 - (1+a)L_2} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & a & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{(1-a)} & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & \boxed{(a-1)} & (b-a) & -a^2 \end{array}\right]$$

Tendo a matriz condensada, pode-se, então, analisar os diferentes valores que as características da matriz dos coeficientes e da matriz completa podem tomar em função dos parâmetros a e b.

O valor máximo que a característica da matriz dos coeficientes pode ter é $\text{car}(\mathbf{A}) = 3$ se $1-a \neq 0$. Neste contexto, $\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}]) = 3$, pelo que o sistema é possível. Como $GI = 1$, este sistema diz-se possível e simplesmente indeterminado.

Negando esta condição, isto é, se $1 - a = 0$, ter-se-á

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & (b-1) & 3 \end{array}\right]_{L_3 \leftrightarrow L_2} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (b-1) & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{C_2 \leftrightarrow C_4} \sim$$

(continuação)

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{(b-1)} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

o valor máximo que a característica de $\mathbf{A}$ pode ter é $\text{car}(\mathbf{A}) = 2$ se $b-1 \neq 0$. Contudo, neste contexto, $\text{car}(\mathbf{A}) \neq \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 3$, pelo que o sistema é impossível.

Negando esta última condição, isto é, se $b - 1 = 0$, ter-se-á

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{L_3 = L_3 - \frac{1}{3}L_2} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

O valor máximo que a característica de $\mathbf{A}$ pode tomar é $\text{car}(\mathbf{A}) = 1$. Contudo, neste contexto, $\text{car}(\mathbf{A}) \neq \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 2$, pelo que o sistema é impossível.

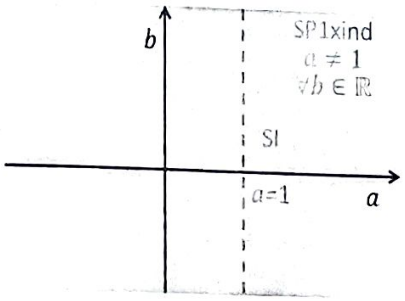


Figura 3.2.: Discussão do sistema em função dos parâmetros a e b.

Em conclusão: este sistema é

- possível e simplesmente indeterminado se $a \neq 1 \; \forall b \in \mathbb{R}$
- impossível se $a = 1 \; , \forall b \in \mathbb{R}$

Exemplo 92.

Considere o sistema seguinte em função dos parâmetros reais a, b e c

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a + 1 \\ x_1 + a x_2 = a \\ x_1 + a^2 x_2 = b \\ x_1 + a^3 x_2 = c \end{cases}$$

A matriz completa deste sistema é $[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & (a+1) \\ 1 & a & a \\ 1 & a^2 & b \\ 1 & a^3 & c \end{array}\right]$

(continuação)

Para se discutir as várias possibilidades de classificação deste sistema, dever-se-á condensar a matriz completa do sistema, de modo a determinar as características do sistema em função dos parâmetros a, b e c

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a+1 \\ 1 & a & a \\ 1 & a^2 & b \\ 1 & a^3 & c \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2=L_2-L_1 \\ L_3=L_3-L_1 \\ L_4=L_4-L_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a+1 \\ 0 & (a-1) & -1 \\ 0 & (a^2-1) & b-a-1 \\ 0 & (a^3-1) & c-a-1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a+1 \\ 0 & (a-1) & -1 \\ 0 & (a-1)(a+1) & b-a-1 \\ 0 & (a-1)\left(a^2+a+1\right) & c-a-1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3=L_3-(a+1)L_2 \\ L_4=L_4-(a^2+a+1)L_3 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1 & a+1 \\ 0 & \boxed{a-1} & -1 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c+a^2 \end{array}\right]$$

Tendo a matriz condensada, pode-se, então, analisar os diferentes valores que as características da matriz dos coeficientes e da matriz completa podem tomar em função dos parâmetros a, b e c.

O valor máximo que a característica de $\mathbf{A}$ pode tomar é $\text{car}(\mathbf{A}) = 2$ se $a - 1 \neq 0$.

$$\text{Neste contexto, car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = \begin{cases} 3 & \Leftarrow b \neq 0 \vee c + a^2 \neq 0 \\ 2 & \Leftarrow b = 0 \wedge c + a^2 = 0 \end{cases}$$

Assim, quando $\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 2$ o sistema é possível, e como $GI = 0$, este sistema diz-se possível e determinado. Quando $\text{car}(\mathbf{A}) \neq \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}])$ o sistema é impossível.

Negando a primeira condição, isto é, se $a - 1 = 0$, ter-se-á

$$\left[\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c+1 \end{array}\right]$$

O valor máximo que a característica pode ter é

$$\text{car}(\mathbf{A}) = 1 \text{ e } \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 2, \ \forall b, c \in \mathbb{R}.$$

Neste contexto, o sistema é impossível.

3.5. Problemas na resolução de sistemas de equações lineares

3.5.1. Problemas mal condicionados

Diz-se que um sistema é bem condicionado quando pequenas alterações nos parâmetros produzem pequenas alterações na solução. Em contraste, num sistema mal condicionado, pequenas alterações nos dados podem produzir grandes alterações na solução. Uma medida de condicionamento de um sistema de equações $\mathbf{Cx} = \mathbf{b}$, é dada por

$$\text{cond}(\mathbf{C}) = \sqrt{\|\mathbf{C}^{-1}\| \, \|\mathbf{C}\|} \tag{3.13}$$

onde valores elevados estão associados a problemas mal condicionados. O exemplo seguinte ilustra um problema mal condicionado.

Exemplo 93.

Uma empresa na sua laboração normal tem necessidade de dois componentes, X e Y, sendo necessários menos unidades de X que de Y. As duas últimas encomendas foram adquiridas ao fornecedor habitual, sendo a primeira composta por 100 unidades do componente X e 98 unidades do componente Y, com um custo total de 99 euros e a segunda encomenda, composta por 96 unidades de X e 100 de Y teve um custo total de 98 euros. Um "fornecedor da concorrência" tinha apresentado uma proposta a um preço "especial" de 95 euros para cada encomenda na condição de lhe serem colocadas futuras encomendas nas mesmas condições. Porque foi regeitada a sua proposta?
Seja x e y o custo em euros por unidade de componente X e Y, respetivamente. Os valores propostos pelo fornecedor habitual são

$$\begin{cases} 100x + 98y = 99 \\ 96x + 100y = 98 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,50 \\ y = 0,50 \end{cases}$$

enquanto que os valores propostos pelo "fornecedor da concorrência" são

$$\begin{cases} 100x + 98y = 95 \\ 96x + 100y = 95 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,32 \\ y = 0,64 \end{cases}$$

Apesar dos valores totais diferirem em menos de 3%, as diferenças de custos por componente entre os fornecedores são muito superiores. Isto deve-se ao facto do problema estar mal condicionado como o comprova o número de condicionamento da matriz $\mathbf{C}$ associada aos coeficientes do sistema:

$$\text{cond}(\mathbf{C}) = \sqrt{\|\mathbf{C}^{-1}\| \, \|\mathbf{C}\|} = 65,57$$

Assim, a pequenas variações nos dados estão associadas grandes variações nos resultados do problema. Este facto torna a proposta apresentada pelo "fornecedor da concorrência" menos vantajosa para possíveis encomendas futuras.

3.5.2. Problemas associados à não pivotação

O método de eliminação de Gauss pode, no caso em que o pivô é próximo de zero, conduzir a resultados errados porque provoca uma ampliação dos erros de arredondamento. Para contornar este problema pode-se adotar a estratégia de pivotação parcial que consiste em escolher para pivô o coeficiente de maior módulo, efetuando trocas entre linhas sempre que for necessário.

Exemplo 94.

Considere-se a resolução do sistema seguinte sem pivotação.

$$\begin{cases} -1,4x + 2,0y = 1,0 \\ x - 1,4y + z = 1,0 \\ 2,0y - 1,4z = 1,0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1,4 & 2,0 & 0 & 1,0 \\ 1,0 & -1,4 & 1,0 & 1,0 \\ 0 & 2,0 & -1,4 & 1,0 \end{array}\right]_{L_2=L_2+\frac{1}{1,4}L_1}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1,4 & 2,0 & 0 & 1,0 \\ 0 & 0.02 & 1,0 & 1,7 \\ 0 & 2,0 & -1,4 & 1,0 \end{array}\right]_{L_3=L_3-\frac{2.0}{0.02}L_2}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1,4 & 2,0 & 0 & 1,0 \\ 0 & 0,02 & 1,0 & 1,7 \\ 0 & 0 & -101,4 & -169 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1-2,0y}{-1,4} = 1,43 \\ y = \frac{1,7-z}{0,02} = 1,50 \\ z = \frac{-169}{-101,4} = 1,67 \end{cases}$$

Esta solução é errada porque não serve ao sistema, como se pode comprovar:

$$\begin{cases} x = 1,43 \\ y = 1,50 \\ z = 1,67 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1,4x + 2,0y = 0,998 \approx 1,0 \\ x - 1,4y + z = 1,0 \\ 2,0y - 1,4z = 0,662 \neq 1,0 \end{cases}$$

No entanto, a resolução do mesmo sistema por pivotação parcial conduz à seguinte solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1,4 & 2,0 & 0 & 1,0 \\ 1,0 & -1,4 & 1,0 & 1,0 \\ 0 & 2,0 & -1,4 & 1,0 \end{array}\right]_{L_2=L_2+\frac{1}{1,4}L_1}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1,4 & 2,0 & 0 & 1,0 \\ 0 & 0.02 & 1,0 & 1,7 \\ 0 & 2,0 & -1,4 & 1,0 \end{array}\right]_{L_3 \leftrightarrow L_2}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1,4 & 2,0 & 0 & 1,0 \\ 0 & 2,0 & -1,4 & 1,0 \\ 0 & 0,02 & 1,0 & 1,7 \end{array}\right]_{L_3=L_3-\frac{0.02}{2.0}L_2}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1,4 & 2,0 & 0 & 1,0 \\ 0 & 2,0 & -1,4 & 1,0 \\ 0 & 0 & -0,986 & -1,69 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1-2,0y}{-1,4} = 1,71 \\ y = \frac{1,0+1,4z}{2} = 1,70 \\ z = \frac{-1,69}{-0,986} = 1,71 \end{cases}$$

(continuação)

Como se pode constatar, esta solução serve ao sistema pois:

$$\begin{cases} x = 1,71 \\ y = 1,70 \\ z = 1,71 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1,4x + 2,0y = 1,006 \approx 1,0 \\ x - 1,4y + z = 1,04 \approx 1,0 \\ 2,0y - 1,4z = 1,006 \approx 1,0 \end{cases}$$

Isto acontece pois como o erro associado à resolução de sistemas pelo método de eliminação de Gauss é proporcional ao maior dos quocientes entre o pivô e o elemento a anular. Assim, no primeiro caso a erro será proporcional a

$$\max\left\{\tfrac{1}{1.4}, \tfrac{2.0}{0.02}\right\} = \max\{0.71,\ 100\} = 100$$

e na segunda resolução, fazendo pivotação parcial, o erro é proporcional a

$$\max\left\{\tfrac{1}{1.4}, \tfrac{0.02}{2.0}\right\} = \max\{0.71,\ 0.01\} = 0.71$$

3.6. Exercícios resolvidos

Exercício 27.

Considere o circuito elétrico ilustrado na figura 3.3

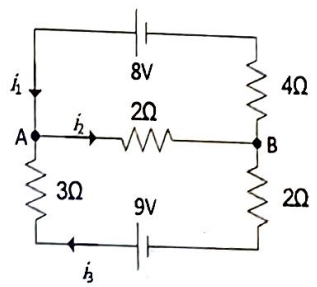


Figura 3.3.: Circuito elétrico.

A diferença de potencial entre os terminais da bateria, medida em volts (V), produz uma corrente que sai do polo positivo da bateria (indicado pelo lado que contém a reta vertical mais longa). As letras maiúsculas representam os nós do circuito elétrico. A letra i (não confundir com unidade imaginária que, neste contexto, se representa pela letra j) representa a corrente entre os nós e as setas indicam o sentido de fluxo, mas se i for negativa, então a corrente flui no sentido oposto ao indicado. As correntes são medidas em amperes e as resistências em ohms (Ω).

Com base nas leis de Kirchhoff para circuitos elétricos, determine as correntes nas malhas.

Resolução.

Para determinar as correntes, recorre-se às leis de Kirchhoff:

- A soma algébrica das correntes em qualquer nó do circuito é nula;
- Numa malha, a soma algébrica das quedas de tensão é igual à soma algébrica das fontes de tensão.

A diferença de potencial elétrico U em cada resistência é dada pela lei de Ohm:

$$U = iR$$

onde i representa a corrente em amperes e R a resistência em ohms.

Determine-se, agora, as correntes do circuito elétrico considerado. Da primeira lei de Kirchhoff obtém-se

$i_1 - i_2 + i_3 = 0$ (nóA)

$-i_1 + i_2 - i_3 = 0$ (nó B)

Da segunda lei de Kirchhoff resulta que

$4i_1 + 2i_2 = 8$ (malha superior)

$2i_2 + 5i_3 = 9$ (malha inferior)

Pode-se representar o circuito elétrico usando a seguinte matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \end{array}\right]$$

Esta matriz pode ser reduzida à forma escada da seguinte forma:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2=L_2+L_1 \\ L_3=L_3-4L_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \end{array}\right]_{L_2 \leftrightarrow L_4} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 6 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]_{L_3=L_3-3L_2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & -19 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]_{L_3=\frac{1}{19}\,L_3} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Resolvendo por substituição ascendente, obtém-se:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ 2i_2 + 5i_3 = 9 \\ i_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i_1 = i_2 - i_3 = 1 \\ i_2 = (9 - 5i_3)/2 = 2 \\ i_3 = 1 \end{cases}$$

Isto é, $i_1 = 1\text{A}$, $i_2 = 2\text{A}$ e $i_3 = 1\text{A}$.

■

Exercício 28.

Determine a solução do sistema $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$.

Resolução.

A matriz completa deste sistema é

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

a condensação desta matriz, para poder classificar este sistema, é dada por

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2 = L_2 - 2L_1 \\ L_3 = L_3 - L_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \end{array}\right]_{L_2 \leftrightarrow L_3}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 2 \\ n = \text{nº de incógnitas} = 3 \end{array} \right.$$

Tendo a matriz condensada, pode verificar-se que, como as matrizes $\mathbf{A}$ e $[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]$ têm características iguais, este sistema é um sistema possível.

Nestas condições, e sendo $GI = n - \text{car}(\mathbf{A}) = 3 - 2 = 1$, este sistema diz-se SP1 $\times$ ind ou sistema possível simplesmente indeterminado.

Considere-se x_1 e x_2 as incógnitas principais deste sistema e considere-se que estas podem ser dependentes da incógnita $x_3 = w$. Então, com base nesta matriz condensada, a reescrita do sistema na sua forma convencional será

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_2 = -4 \end{cases}$$

A determinação do valor das incógnitas é efetuada começando pela última equação e, de seguida, passa-se à substituição do valor entretanto encontrado na equação anterior, repetindo-se este procedimento até estarem todas determinadas

$$\begin{cases} - - - - - \\ - - - - - \\ x_3 = w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - - - - - \\ 2x_2 = -4 \Leftrightarrow x_2 = -2 \\ x_3 = w \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2 + w = 3 \Leftrightarrow x_1 = 1 - w \\ x_2 = -2 \\ x_3 = w \end{cases}$$

a solução é $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-w \\ -2 \\ w \end{bmatrix}$, $w \in \mathbb{R}$

■

Exercício 29.

Determine a solução do sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$

Resolução.

A matriz completa deste sistema é

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

A condensação desta matriz, para poder classificar este sistema, é dada por

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \underset{\substack{L_3 = L_3 - 5L_1}}{\overset{L_2 = L_2 - 3L_1}{}} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 5 & -3 \\ 0 & -4 & 5 & -2 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - L_2}{} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \blacksquare & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{car}(\mathbf{A}) = 2 \wedge \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 3 \\ n = \text{nº de incógnitas} = 3 \end{array} \right.$$

Tendo a matriz condensada, pode verificar-se que, como as matrizes $\mathbf{A}$ e $[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]$ têm características diferentes, este sistema é um sistema impossível, pelo que não tem solução.

■

Exercício 30.

Resolva, pelo método de eliminação de Gauss, o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + 2\,x + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_3 = 0 \\ 7x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Resolução.

A matriz completa deste sistema é

$$[\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 7 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

A condensação desta matriz, para poder classificar este sistema, é dada por

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 7 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2=L_2-3L_1 \\ L_3=L_3-4L_1 \\ L_4=L_4-7L_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & -8 & -6 & 0 \\ 0 & -12 & -6 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_3=L_3-2L_2 \\ L_4=L_4-3L_1 \\ L_2=-L_2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4=L_4-3L_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-4} & -4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} \mathrm{car}(\mathbf{A}) = \mathrm{car}([\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}]) = 3 \\ \text{nº de incógnitas} = 3 \end{array}\right.$$

Tendo a matriz condensada, pode verificar-se que, como as matrizes $\mathbf{A}$ e $[\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}]$ têm características iguais, este sistema é um sistema possível.

Nestas condições, e sendo $GI = 0$, este sistema diz-se possível e determinado. A sua solução é única e diz-se trivial, pois todas as incógnitas terão valor zero, tal como se verá aquando da reescrita do sistema na sua forma convencional

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -4x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases}$$

A determinação do valor de cada incógnita será efetuada começando pela última equação, por ser aquela que permite a obtenção da incógnita de forma mais fácil e, de seguida, passar-se-á à substituição do valor entretanto encontrado na equação anterior, repetindo este procedimento até estarem determinadas todas as incógnitas

$$\begin{cases} - - - \\ - - - \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - - - \\ -4x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

obtendo-se a solução trivial $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

■

Exercício 31.

Considere o circuito elétrico da figura.

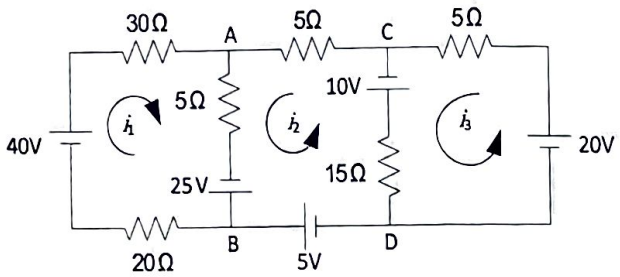


Figura 3.4.: Circuito elétrico.

Com base nas leis de Kirchhoff para circuitos elétricos:

1. Formule a equação matricial para o problema de determinação das correntes nas malhas do circuito.
2. Determine as correntes nas malhas, recorrendo à Regra de Cramer.
3. Com recurso ao cálculo da matriz inversa, determine as correntes nas malhas.

Resolução.

Para determinação das correntes i_1, i_2 e i_3 que percorrem as três malhas que compõem o circuito, vai-se adoptar o sentido indicado na figura como o sentido positivo. Tendo em atenção a lei dos nós, para as malhas esquerda e central, a corrente que atravessa o ramo AB é $i_1 + i_2$; a corrente que atravessa o ramo CD é $i_2 - i_3$ para a malha central e $i_3 - i_2$ para a malha direita. A queda de tensão nas resistências, U, é dada pela lei de Ohm, $U = iR$.

1. A lei das malhas aplicada a cada malha resulta no sistema de equações lineares de incógnitas i_1, i_2 e i_3, suficiente para determinar a solução do problema

$$\begin{cases} 30i_1 + 5(i_1 + i_2) + 20i_1 = 25 + 40 \\ 5(i_1 + i_2) + 15(i_2 - i_3) + 5i_2 = 25 - 5 - 10 \\ 15(i_3 - i_2) + 5i_3 = 10 + 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 55i_1 + 5i_2 + 0i_3 = 65 \\ 5i_1 + 25i_2 - 15i_3 = 10 \\ 0i_1 - 15i_2 + 20i_3 = 30 \end{cases}$$

2. Os determinantes associados às incógnitas e o determinante associado aos coeficientes têm os valores

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 55 & 5 & 0 \\ 5 & 25 & -15 \\ 0 & -15 & 20 \end{vmatrix} = 14625$$

$$\det(\mathbf{A}_1) = \begin{vmatrix} 65 & 5 & 0 \\ 10 & 25 & -15 \\ 30 & -15 & 20 \end{vmatrix} = 14625$$

$$\det(\mathbf{A}_2) = \begin{vmatrix} 55 & 65 & 0 \\ 5 & 10 & -15 \\ 0 & 30 & 20 \end{vmatrix} = 29250$$

$$\det(\mathbf{A}_3) = \begin{vmatrix} 55 & 5 & 65 \\ 5 & 25 & 10 \\ 0 & -15 & 30 \end{vmatrix} = 43875$$

Recorrendo à fórmula de Cramer, obtêm-se as correntes no circuito

$$\begin{cases} i_1 = \dfrac{\det(\mathbf{A}_1)}{\det(\mathbf{A})} = 1 \\ i_2 = \dfrac{\det(\mathbf{A}_2)}{\det(\mathbf{A})} = 2 \\ i_3 = \dfrac{\det(\mathbf{A}_3)}{\det(\mathbf{A})} = 3 \end{cases}$$

a solução é $\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ A

3. O sistema de equações lineares indicado no ponto 1 corresponde à equação matricial

$$\begin{bmatrix} 55 & 5 & 0 \\ 5 & 25 & -15 \\ 0 & -15 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65 \\ 10 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Resolvendo esta equação matricial, tem-se

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 & 5 & 0 \\ 5 & 25 & -15 \\ 0 & -15 & 20 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 65 \\ 10 \\ 30 \end{bmatrix}$$

A determinação da matriz inversa pode ser obtida por qualquer processo indicado no capítulo 2 de que resulta em

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{585} \begin{bmatrix} 11 & -4 & -3 \\ -4 & 44 & 33 \\ -3 & 33 & 54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 65 \\ 10 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Assim, a solução do problema é

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{585} \begin{bmatrix} 585 \\ 1170 \\ 1755 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

■

3.6.1. Exercícios resolvidos em MATLAB

Exercício 32.

Resolva o sistema de equações lineares $\begin{cases} x+y+4z-t=1 \\ x+4y+z+3t=1 \\ 5x+5y+2z=2 \\ 3x+5y+4z=1 \end{cases}$

Resolução.

A resposta pode ser obtida por diversas formas. Assim,

1) Utilizando o operador " \ "

SCRIPT MATLAB 3.1

```
>> format rat
>> A=[1,1,4,-1;1,4,1,3;5,5,2,0;3,5,4,0];
>> B=[1;1;2;1];
>> X=A\B
X =
    7/8
    -5/8
    3/8
    3/4
```

2) Utilizando a matriz inversa da matriz dos coeficientes, calculada através do comando "`inv`".

SCRIPT MATLAB 3.2

```
>> format rat
>> A=[1,1,4,-1;1,4,1,3;5,5,2,0;3,5,4,0];
>> B=[1;1;2;1];
>> X=inv(A)*B
X =
    7/8
    -5/8
    3/8
    3/4
```

3) Utilizando o comando "`rref`" que nos mostra a matriz na forma escalonada

SCRIPT MATLAB 3.3

```
>> format rat
>> A=[1,1,4,-1;1,4,1,3;5,5,2,0;3,5,4,0];
>> B=[1;1;2;1];
>> k=[A B]
k =
     1     1     4    -1     1
     1     4     1     3     1
     5     5     2     0     2
     3     5     4     0     1
>> S=rref(k)
S =
     1     0     0     0     7/8
     0     1     0     0    -5/8
     0     0     1     0     3/8
     0     0     0     1     3/4
```

■

Exercício 33.

Resolva e classifique o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x+y+4z-t=1 \\ x+4y+z+3t=1 \\ 5x+5y+2z=2 \\ 3x+-3z-2t=0 \end{cases}$$

Resolução.

1) Utilizando o operador " \ "

SCRIPT MATLAB 3.4

```
>> format rat
>> A=[1,1,4,-1;1,4,1,3;5,5,2,0;3,0,-3,-2];
>> B=[1;1;2;0];
>> X=A\B
Warning: Matrix is close to singular or badly scaled. Results may
be inaccurate. RCOND = 2.032273e-017.
```

Nota: como **A** não é uma matriz invertível, neste caso, aparece a mensagem de erro, embora apresente uma solução que pode estar completamente errada.

2) Utilizando a inversa de A

SCRIPT MATLAB 3.5

```
>> format rat
>> A=[1,1,4,-1;1,4,1,3;5,5,2,0;3,0,-3,-2];
>> B=[1;1;2;0];
>> X=inv(A)*B
Warning: Matrix is close to singular or badly scaled. Results may
be inaccurate. RCOND = 2.032273e-017.
```

Nota: embora apresente solução, esta pode estar completamente errada, tal como com o *script* anterior.

3) Colocando a matriz na forma escalonada

SCRIPT MATLAB 3.6

```
>> format rat
>> A=[1,1,4,-1;1,4,1,3;5,5,2,0;3,0,-3,-2];
>> B=[1;1;2;0];
>> k=[A B]
k =
     1     1     4    -1     1
     1     4     1     3     1
     5     5     2     0     2
     3     0    -3    -2     0
>> S=rref(k)
S =
     1     0     0   -17/18    1/6
     0     1     0    19/18    1/6
     0     0     1    -5/18    1/6
     0     0     0        0      0
```

O que nos permite classificar o sistema em sistema possível simplesmente indeterminado e encontrar a solução $\left\{\left(\frac{1}{6}+\frac{17}{18}t, \frac{1}{6}-\frac{19}{18}t, \frac{1}{6}+\frac{5}{18}t, t\right),\ t \in \mathbb{R}\right\}$

■

Exercício 34.

Resolva, se possível, o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x+y+4z-t=1 \\ x+4y+z+3t=1 \\ 5x+5y+2z=2 \\ 3x+-3z-2t=2 \end{cases}$$

Resolução.

1) Utilizando o operador " \ ", a inversa de **A** e a matriz na forma escalonada, tem-se o seguinte *script*

SCRIPT MATLAB 3.7

```
>> format rat
>> A=[1,1,4,-1;1,4,1,3;5,5,2,0;3,0,-3,-2];
>> B=[1;1;2;2];
>> X=A\B
Warning: Matrix is close to singular or badly scaled. Results may
be inaccurate. RCOND = 2.032273e-017.
>>
>> X=inv(A)*B
Warning: Matrix is close to singular or badly scaled. Results may
be inaccurate. RCOND = 2.032273e-017.
>>
>> k=[A B]
k =
     1     1     4    -1     1
     1     4     1     3     1
     5     5     2     0     2
     3     0    -3    -2     2
>> S=rref(k)
S =
     1     0     0   -17/18    0
     0     1     0    19/18    0
     0     0     1    -5/18    0
     0     0     0        0    1
```

Embora o operador " \ " e a inversão de **A** possam apresentar uma resposta, esta pode estar completamente errada. Apenas a matriz escalonada permite classificar o sistema, neste caso, em sistema impossível e, por isso, não tem solução.

■

Exercício 35.

Resolva e classifique o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x+y+4z-t=1 \\ -x-y-4z+t=-1 \\ 5x+5y+2z=2 \\ 4x+4y-2z+t=1 \end{cases}$$

Resolução.

Utilizando sucessivamente o comando " \ ", a inversa da matriz e a matriz na forma escalonada tem-se o seguinte *script*:

SCRIPT MATLAB 3.8

```
>> format short
>> A=[1,1,4,-1;-1,-1,-4,1;5,5,2,0;4,4,-2,1];
>> B=[1;-1;2;1];
>> X=A\B
Warning: Matrix is singular to working precision.
X =
    NaN
    NaN
   -Inf
   -Inf
>>
>> X=inv(A)*B
Warning: Matrix is singular to working precision.
X =
    NaN
    NaN
    NaN
    NaN
>>
>> k=[A B]
k =
     1     1     4    -1     1
    -1    -1    -4     1    -1
     5     5     2     0     2
     4     4    -2     1     1
>> format rat
>> S=rref(k)
S =
     1     1     0     1/9    1/3
     0     0     1   -5/18    1/6
     0     0     0      0      0
     0     0     0      0      0
```

Apenas esta última resposta nos permite classificar o sistema em sistema possível duplamente indeterminado e encontrar a solução

$$\left\{\left(\tfrac{1}{3}-y-\tfrac{1}{9}t, y, \tfrac{1}{6}+\tfrac{5}{18}t, t\right),\ y,t\in\mathbb{R}\right\}$$

■

3.7. Exercícios propostos

1. Considere o sistema de equações lineares $\begin{cases} x+y+4z-t=1 \\ x+4y+z+3t=1 \\ 5x+5y+2z=2 \\ y-z+2t=0 \\ 3x+5y+4z=2 \end{cases}$

   a) diga quais as suas equações principais;

   b) diga quais as suas incógnitas principais;

   c) classifique o sistema.

2. Utilizando o método da condensação, classifique e resolva cada um dos seguintes sistemas de equações lineares:

   a) $\begin{cases} 2x+5y=2 \\ 3x+y=5 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} -5x+2y=1 \\ 10x-4y=3 \\ x+y=8 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ y=0 \\ x+z=-1 \end{cases}$

   d) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-3y+4z=-2 \\ x-3y+4z=-1 \end{cases}$

   e) $\begin{cases} 3x+y-z=2 \\ x+2y+2z=11 \\ -x+y+2z=1 \\ 2x-3y+z=5 \\ x+y+z=6 \end{cases}$

   f) $\begin{cases} x+2y+z=2 \\ x+y=1 \\ x-z=0 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$

   g) $\begin{cases} y+2z=-1 \\ 3x+4z=-1 \\ x-5y+4z=4 \\ y+6z=-1 \\ x-4y+6z=3 \\ 3x-y+2z=0 \end{cases}$

   h) $\begin{cases} -3x+y-2z-5t=1 \\ x-3y-z+9t=1 \\ x-3y-z+9t=-2 \end{cases}$

   i) $\begin{cases} 3x+2z+t=3 \\ x+2y+2z+4t=1 \\ x+2y+5t=1 \\ 3y-z+7t=0 \end{cases}$

   j) $\begin{cases} x-2y-5z+t=-1 \\ 3x+5y+4z=2 \\ 3x+3y-t=1 \\ 3x+4y+5z-2t=2 \\ 2x+2y+2z+t=1 \end{cases}$

   k) $\begin{cases} 2x-2y-z+3t=0 \\ x+5y-2z=3 \\ -x+5y-z-3t=3 \end{cases}$

   l) $\begin{cases} -x+3y-2z+3t=1 \\ 4x+8y-4z+15t=8 \\ 5y-3z+7t=3 \end{cases}$

   m) $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ y+3t=1 \\ 2x+2z-4t=0 \\ 4x+y+5z-7t=1 \end{cases}$

   n) $\begin{cases} x-y-z=0 \\ -x+2y+7z=-1 \\ x+y=-1 \end{cases}$

o) $\begin{cases} 2x+y+5z=1 \\ -7x-4y-16z=-9 \\ 6x+2y+19z=-10 \end{cases}$

p) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y+z+4t=3 \\ -x-2y+z-5t=-1 \\ 3x+5y+4z+10t=9 \end{cases}$

q) $\begin{cases} x-y-z=2 \\ 2x+y+z=5 \\ -x-y-z=-4 \end{cases}$

r) $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x-y+4z=3 \\ -x-3z=-2 \end{cases}$

s) $\begin{cases} x-y+z=1 \\ -x+2y-2z=-2 \\ x-2y+2z=2 \\ -2x+4y-4z=-4 \end{cases}$

t) $\begin{cases} -x+2y=1 \\ -x+3y=0 \\ 2x-4y=-3 \end{cases}$

u) $\begin{cases} x+3y-2z=2 \\ -x-4y+5z=3 \\ 2x+4y+2z=16 \end{cases}$

v) $\begin{cases} 2x-2y+5z=1 \\ -2x+3y-2z=1 \\ 4x-2y+14z=5 \\ 6x-7y+8z=2 \end{cases}$

3. Considere os seguintes sistemas de equações lineares:

i) $\begin{cases} x+2y=0 \\ -2x+3y=7 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} -x+5y-6z=2 \\ 2x-3y+5z=-1 \\ 2x+5z=-4 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} y+2z-t=-1 \\ -x+y+2z-t=1 \\ 2x+3y+t=0 \\ x-y-2z=1 \end{cases}$

a) prove que os sistemas apresentados são sistemas de Cramer;

b) resolva-os, utilizando as fórmulas de Cramer;

c) confirme os resultados anteriores, resolvendo cada sistema com o cálculo da matriz inversa.

4. Considere o sistema de equações lineares $\begin{cases} x+ay=1 \\ x+2y+z=0 \\ x+ay-z=1 \end{cases}$ e indique:

a) para que valores de $a \in \mathbb{R}$, o sistema apresentado é de Cramer;

b) uma sua solução utilizando a regra de Cramer.

5. Considere as matrizes $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

e determine:

a) o valor do parâmetro real, a, de modo que o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ seja de Cramer;

b) as soluções do sistema nas condições da alínea anterior, utilizando a regra

de Cramer.

6. Comente, exemplificando, as seguintes afirmações
   a) "*um sistema de 4 equações a 3 incógnitas é um sistema determinado*"
   b) "*um sistema de 3 equações a 3 incógnitas é um sistema determinado*"
   c) "*um sistema de 2 equações a 3 incógnitas é um sistema determinado*"
   d) "*um sistema de 2 equações a 3 incógnitas é um sistema impossível*"

7. Discuta, por condensação, os seguintes sistemas homogéneos em função do parâmetro real a:
   a) $\begin{cases} x+ay+az=0 \\ ax+ay+az=0 \\ (a+1)x+(a+1)y+az=0 \end{cases}$
   b) $\begin{cases} 2x-(a+1)y-(a+1)z=0 \\ 2x+y=0 \\ x-ay-z=0 \end{cases}$
   c) $\begin{cases} 2x-6y+7t=0 \\ x+ay+2z+3t=0 \\ 3x-2(2+a)y+5z+11t=0 \end{cases}$

8. Considere o sistema $\begin{cases} 3x+y=ax \\ 5x+3y=-ay \end{cases}$ e calcule o parâmetro real a que permite obter um sistema com:
   a) soluções não nulas;
   b) uma única solução;
   c) nenhuma solução.

9. Considere o sistema $\begin{cases} 2x+y+az=1 \\ 4y+bz=0 \\ x+2y+cz=d \end{cases}$ e estabeleça uma relação entre os parâmetros reais a, b, c e d que permitem obter um sistema com:
   a) soluções não nulas;
   b) uma única solução;
   c) nenhuma solução.

10. Considere o sistema de Cramer $\begin{cases} x+2y+bz=8 \\ (a+1)x+2y+(b-1)z=7 \\ 2x-2y+(b-1)z=-2 \end{cases}$ e determine:
    a) os valores dos parâmetros reais a e b , sabendo que $S=\{(1,2,3)\}$;
    b) qual será a solução deste sistema, se se multiplicar por 3 os seus termos independentes.

11. Considere o sistema $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ 3x+y-z-t=4 \\ 7x+3y-z-t=9 \\ 5x+3y+z+t=3 \end{cases}$

a) classifique o sistema, utilizando a condensação de matrizes;

b) sem alterar o número de equações e incógnitas do sistema dado, reescreva-o de modo que seja um sistema possível;

c) substitua a 4ª equação por outra, de modo a que o sistema se torne possível e determinado.

12. Considere o sistema $\begin{cases} x+y+z=2 \\ -x+y+2z=-2 \end{cases}$ e acrescente-lhe uma 3ª equação de modo que este passe a ser

a) um sistema possível e determinado;

b) um sistema impossível;

c) um sistema possível simplesmente indeterminado.

13. Discuta, por condensação, os seguintes sistemas com parâmetros reais a e b

a) $\begin{cases} 4x+(a-1)y+4z=4 \\ 2x+(a+1)y+2z=3 \\ x-2(2+a)y+2z=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x-ay+az=6 \\ x+(a+1)y=3 \\ x+2y-(a+1)z=-3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+4y+z=3 \\ 2x+7y+(a+1)z=2 \\ 2x+2y+(a-2)z=-2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-5y=9 \\ 2x+(a+2)y+(b+1)z=10 \\ 2x-(a+1)y-(b-2)z=5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} (a+1)x+(b+1)y+2z=7 \\ 3x+4by+3z=10 \\ (a+2)x+(b+3)y=11 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x+(a-2)y+(2a-1)z=3 \\ 4x-ay+az=2 \\ -3x-3y+(a+2)z=4 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x-ay=1 \\ x+by=a+2 \end{cases}$

h) $\begin{cases} ax-(a-2)y+az=a-1 \\ (3a+2)x+(a+4)y+(a+4)z=a+1 \\ (2a+2)x+(a+3)y+(a+3)z=3 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x-y+az=1 \\ 2x-2y-(a-2)z=3 \\ ax+y-z=a \\ (a+1)x+y-az=a+2 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x+y+z+t=a \\ (a+2)x+(a+2)y+(2a+1)z+(b+2)t=a+1 \\ (a+1)x+2y+2az+(b+1)t=2a \end{cases}$

k) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+ay+(a-1)z=a \\ (2a+1)x+2ay+(3a+2)z=a+1 \end{cases}$

l) $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a^2 \end{cases}$

m) $\begin{cases} 2x-(2a-1)y-az=-1 \\ -x+(a-2)y+(4a-2)z=3a-1 \\ 3x-(a-1)y+3z=-a \end{cases}$

n) $\begin{cases} x+2y-z=-2 \\ (a+2)x+y+z+t=b+2 \\ (a+3)x+3y+t=b+1 \end{cases}$

o) $\begin{cases} 2x+(a+1)y+3z=b+2 \\ x+ay+z=b \\ 4x+(a+3)y+4z=b+6 \end{cases}$

p) $\begin{cases} 2x+(a+1)y+2z=0 \\ 4x+ay+3z=b \\ 2x-y+z=b \end{cases}$

14. Considere o seguinte sistema de equações lineares: $\begin{cases} x+z=2 \\ x+ay+z=4 \\ 4x-ay+b^2z=b+7 \end{cases}$

e, utilizando o método da condensação:

a) discuta as diferentes soluções em função dos parâmetros reais a e b que as condicionam;

b) classifique o sistema considerando $a=1 \wedge b=-1$ e resolva-o.

15. Considere o seguinte sistema de equações lineares: $\begin{cases} x+ay+a^2z=1 \\ x+ay+abz=a \\ bx+a^2y+a^2bz=a^2b \end{cases}$

e, utilizando o método da condensação:

a) discuta as diferentes soluções em função da variação dos parâmetros reais a e b que as condicionam;

b) classifique o sistema considerando $a=1 \wedge b=1$ e resolva-o.

16. Considere o sistema de equações lineares nas incógnitas x, y e z

$$\begin{cases} x+y+\alpha^2z=1 \\ x+\alpha^2y+z=1 \\ \alpha^2x+y+z=\alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R} \text{ e}$$

a) escreva a matriz $\mathbf{A}$ dos coeficientes do sistema.

b) Discuta o sistema em função do parâmetro α, sabendo que
$|\mathbf{A}| = -(\alpha-1)^2(\alpha+1)^2(\alpha^2+2)$.

c) Justifique a afirmação "Se $\alpha = 0$, *a matriz dos coeficientes do sistema é invertível*".

d) Determine $\mathbf{A}^{-1}$, fazendo $\alpha = 0$;

e) determine a solução do sistema para $\alpha = 0$.

3.8. Soluções dos exercícios propostos

1.

a) Equações 1, 2, 3 e 4 b) $\{(x,y,z,t)\}$ c) $\left\{\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},0\right)\right\}$

2. Os sistemas classificam-se em

a) Possível e determinado; $\left\{\left(\frac{23}{13},-\frac{4}{13}\right)\right\}$

b) Impossível; $\{()\}$

c) Possível e determinado; $\{(0,0,-1)\}$

d) Impossível; $\{()\}$

e) Impossível; $\{()\}$

f) Possível e simplesmente indeterminado; $\{(k,1-k,k)\}, k \in \mathbb{R}$

g) Impossível

h) Impossível

i) Possível e simplesmente indeterminado; $\left\{\left(-\frac{2k-3}{3},-\frac{13}{6}k,\frac{k}{2},k\right)\right\}, k \in \mathbb{R}$

j) Possível e determinado; $\left\{\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},0\right)\right\}$

k) Possível e indeterminado; $\left\{\left(k,0,\frac{k-3}{2},-\frac{k+1}{2}\right)\right\}, k \in \mathbb{R}$

l) Possível e indeterminado; $\left\{\left(-\frac{k-4}{5},\frac{3k+3}{5},k,0\right)\right\}, k \in \mathbb{R}$

m) Possível e indeterminado; $\{(0,1-3k,2k,k)\}, k \in \mathbb{R}$

n) Possível e determinado; $\left\{\left(-\frac{6}{11},-\frac{5}{11},-\frac{1}{11}\right)\right\}$

o) Possível e determinado; $\{(3,5,-2)\}$

p) Possível e determinado; $\left\{\left(-\frac{8}{5},\frac{7}{5},\frac{6}{5},\frac{1}{5}\right)\right\}$

q) Possível e determinado; $\{(0,1,2)\}$

r) Impossível

s) Impossível

t) Impossível

3.

a) Os determinantes das matrizes dos coeficientes são não nulos; $\triangle_1 = 7$, $\triangle_2 = -21$, e $\triangle_3 = 6$

b) $\{(-2,1)\}$, $\left\{\left(\frac{11}{7},-1,\frac{10}{7}\right)\right\}$, $\left\{\left(-2,2,-\frac{5}{2},-2\right)\right\}$

c)

4.
   a) $a \neq 2$ b) $\left\{\left(-\frac{2}{a-2}, \frac{1}{a-2}, 0\right)\right\}$

5.
   a) $a \neq \frac{2}{3}$ b) $\left\{\left(\frac{10}{3a-2}, -\frac{a+6}{3a-2}, -\frac{4a+4}{3a-2}\right)\right\}$

6.

7. Os sistemas classificam-se em
   a) Possível e determinando se $a \neq 0 \wedge a \neq 1$; simplesmente indeterminado se $a = 0 \vee a = 1$
   b) Possível e determinando se $a \neq -\frac{3}{2} \wedge a \neq 1$; simplesmente indeterminado se $a = -\frac{3}{2} \vee a = 1$
   c) Simplesmente indeterminado

8.
   a) $a = -2 \vee a = 2$ b) $a \neq -2 \wedge a \neq 2$ c) $\{\}$

9.
   a) $4a + 3b - 8c = 0 \wedge d = \frac{1}{2}$
   b) $4a + 3b - 8c \neq 0$
   c) $4a + 3b - 8c = 0 \wedge d \neq \frac{1}{2}$

10.
   a) $a = 2 \wedge b = 1$ b) $S = \{(3, 6, 9)\}$

11.
   a) Impossível
   b) Por exemplo, $\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 3x + y - z - t = 4 \\ 7x + 3y - z - t = 9 \\ 5x + 3y + z + t = 6 \end{cases}$
   c) Não é possível

12.
   a) $x + y + 2z = 1$
   b) $x + y + z = 3$
   c) $2y + 3z = 0$

13. Os sistemas classificam-se em
   a) Possível e determinado se $a \neq -3$; impossível se $a = -3$
   b) Possível e determinado $\forall a \in \mathbb{R}$
   c) Possível e determinado se $a \neq \frac{2}{5}$; impossível se $a = \frac{2}{5}$
   d) Possível e determinado se $\left(a \neq -12 \wedge b \neq \frac{a+5}{7}\right) \vee (a = -12 \wedge b \neq -1)$; impossível se $(a = -12 \wedge b = -1) \vee \left(a = 7b - 5 \wedge b \neq \frac{1}{7}\right)$; possível simplesmente indeterminado se $a = -4 \wedge b = \frac{1}{7}$.
   e) Possível e determinado se $a \neq 1 \wedge b \neq \frac{3}{2} \wedge b \neq \frac{3}{4a+1}$; impossível se $a = 1 \wedge b \neq 0$ ou se $b = \frac{3}{2}$; possível simplesmente indeterminado se $a = 1 \wedge b = 0$.

f) Possível e determinado se $a \neq 1 \wedge a \neq -2$; impossível se $a = 1 \vee a = -2$.

g) Possível e determinado se $a = -b$; impossível se $a = -b \neq -1$; simplesmente indeterminado se $a = -b = -1$.

h) Possível e determinado se $a \neq 1 \wedge a \neq -2$; impossível se $a = 1 \vee a = -2$.

i) Possível e determinado se $a = 0$; impossível se $a \neq 0$.

j) Sistema possível simplesmente indeterminado se $a \neq 1 \wedge b \neq a$ ou se $a = b \neq 1$; Impossível se $a = 1$.

k) Possível e determinado $\forall a \in \mathbb{R}$

l) Possível se determinado se $a \neq 1 \wedge a \neq -2$; impossível se $a = -2$; possível duplamente indeterminado se $a = 1$.

m) Possível e determinado $\forall a \in \mathbb{R}$

n) Impossível

o) Possível e determinado se $a \neq 1$; impossível se $a = 1 \wedge b \neq 2$; possível simplesmente indeterminado se $a = 1 \wedge b = 2$.

p) Possível simplesmente determinado $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

14. Os sistemas classificam-se em

a) Possível e determinado se $a \neq 0 \wedge b \neq \pm 2$; impossível se $a = 0 \vee b = \pm 2$

b) Possível e determinado, $\{(2, 2, 0)\}$

15. Os sistemas classificam-se em

a) Possível e determinado se $a \neq 0 \wedge b \neq a$; impossível se $a = 0 \vee (a = b \wedge b \neq 1)$; possível e duplamente indeterminado se $a = b = 1$

b) $\{(-y - z + 1, y, z), y, z \in \mathbb{R}\}$

16.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & 1 \\ \alpha^2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) Se $\alpha \neq \pm 1$, o sistema é possível e determinado (Cramer)

Se $\alpha = 1$, o sistema é possível e duplamente indeterminado:

$\{(1 - \alpha - \beta, \alpha, \beta), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

Se $\alpha = -1$, o sistema é impossível

c) Se $\alpha = 0$, $|A| = -2 \neq 0$

d) Para $\alpha = 0$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

e) Para $\alpha = 0$, a solução do sistema é $\{(1, 0, 0)\}$

CAPÍTULO

4

Espaços Vetoriais e Transformações Lineares

As operações de soma e multiplicação por um escalar são usadas em diversos contextos e obedecem, em geral, a um mesmo conjunto de regras aritméticas. Surge assim um dos conceitos básicos em álgebra linear, que é o de espaço vetorial ou espaço linear. Espaço vetorial é um termo genérico que pode ser designado para representar diferentes tipos de conjuntos. Para definir um espaço vetorial, é necessário um conjunto de elementos e duas operações definidas sobre os elementos deste conjunto, que podem ser a adição e multiplicação por números reais ou algo até mais genérico. A noção comum de vetores como objetos com tamanho, direção e sentido, juntamente com as operações de adição e multiplicação por números reais, forma a ideia básica de um espaço vetorial, no entanto, não é necessário que os vetores tenham interpretação geométrica, mas podem ser quaisquer objetos que satisfaçam os axiomas indicados.

4.1. Espaços vetoriais sobre um corpo

Nomenclatura e notações

A nomenclatura adotada neste capítulo atribui aos elementos de um corpo $(\mathbb{K}, +, \times)$ uma letra minúscula do alfabeto latino, $a, b, \cdots, k$, e designam-se por escalares; os elementos de um conjunto V, munido de uma operação binária, designam-se por vetores e representam-se por uma letra minúscula em negrito. Contudo, de agora em diante, passar-se-á a designar o corpo $(\mathbb{K}, +, \times)$ por apenas corpo $\mathbb{K}$. Cada vetor é representado analiticamente por uma n-úpla ordenada $\mathbf{v} = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$ ou, na forma matricial, por $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix}^T$ ou $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$.

Definição 114. Espaço vetorial

Seja $(\mathbb{K}, +, \times)$ um corpo e V um conjunto não vazio. Diz-se que V é um *espaço vetorial (ou espaço linear) sobre o corpo* $(\mathbb{K}, +, \times)$, se e só se,

1. Verifica as seguintes propriedades para a operação interna, adição de vetores

Tabela 4.1.: Propriedades para a adição de vetores.

	Propriedade	
A1	Determinação	$\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V, \exists^1 \mathbf{v}_3 \in V : \mathbf{v}_3 = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$
A2	Associatividade	$\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V : (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$
A3	Comutatividade	$\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V : \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1$
A4	Existência de elemento nulo, o vetor nulo, $\mathbf{o}$	$\exists^1 \mathbf{o} \in V, \forall \mathbf{v}_1 \in V : \mathbf{v}_1 + \mathbf{o} = \mathbf{o} + \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$
A5	Existência de elemento oposto, o vetor $(-\mathbf{v}_1)$, simétrico de $\mathbf{v}_1$	$\forall \mathbf{v}_1 \in V, \exists^1 (-\mathbf{v}_1) \in V : \mathbf{v}_1 + (-\mathbf{v}_1) = (-\mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_1 = \mathbf{o}$

2. Verifica as seguintes propriedades para a operação externa, multiplicação de um escalar por um vetor

Tabela 4.2.: Propriedades para a multiplicação de um escalar por um vetor.

	Propriedade	
M1	Determinação	$\forall k_1 \in \mathbb{K}, \forall \mathbf{v}_1 \in \mathbb{V}, \exists^1 \mathbf{v}_2 \in V : \mathbf{v}_2 = (k_1 \mathbf{v}_1)$
M2	Associatividade mista	$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{K}, \forall \mathbf{v}_1 \in V : (k_1 k_2)\, \mathbf{v}_1 = k_1 (k_2 \mathbf{v}_1)$
M3	Distributividade da multiplicação de um escalar em relação à adição de vetores	$\forall k_1 \in \mathbb{K}, \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V : k_1 (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = k_1 \mathbf{v}_1 + k_1 \mathbf{v}_2$
M4	Distributividade da multiplicação de um vetor em relação à adição de escalares	$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{K}, \forall \mathbf{v}_1 \in V : (k_1 + k_2)\, \mathbf{v}_1 = k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_1$
M5	Existência de elemento neutro à esquerda, o escalar 1	$\forall \mathbf{v}_1 \in V : 1 \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$

Os elementos de um espaço vetorial são vetores.

Definição 115. Classificação de espaços vetoriais
De acordo com o corpo $\mathbb{K}$ sobre o qual se considera a estrutura algébrica espaço vetorial, esta pode ser classificada em

- Espaço vetorial Racional
  quando V é definido sobre o corpo $\mathbb{Q}$
- Espaço vetorial Real
  quando V é definido sobre o corpo $\mathbb{R}$
- Espaço vetorial Complexo
  quando V é definido sobre o corpo $\mathbb{C}$

4.1.1. Algumas propriedades elementares dos espaços vetoriais

As propriedades elementares de qualquer espaço vetorial podem ser deduzidas a partir das 8 proposições que constituem a sua definição.

Tabela 4.3.: Propriedades dos espaços vetoriais.

	Propriedade
P1	$\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$, se $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2$, então $\mathbf{v}_1 = \mathbf{o}$
P2	$\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$, se $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$, então $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3$
P3	$\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$, se $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3$, então $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1$
P4	$\forall \mathbf{v}_1 \in V : 0\,\mathbf{v}_1 = \mathbf{o}$
P5	$\forall k_1 \in \mathbb{K} : k_1 \mathbf{o} = \mathbf{o}$
P6	$\forall \mathbf{v}_1 \in V, \forall k_1 \in \mathbb{K} : k_1 \mathbf{v}_1 = \mathbf{o} \Rightarrow k_1 = 0 \vee \mathbf{v}_1 = \mathbf{o}$
P7	$\forall \mathbf{v}_1 \in V, \forall k_1 \in \mathbb{K} : -k_1 \mathbf{v}_1 = (-k_1)\,\mathbf{v}_1 = k_1\,(-\mathbf{v}_1)$
P8	$\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V, \forall k_1 \neq 0 \in \mathbb{K} : k_1 \mathbf{v}_1 = k_1 \mathbf{v}_2 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$
P9	$\forall \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{o} \in V, \forall k_1, k_2 \in \mathbb{K} : k_1 \mathbf{v}_1 = k_2 \mathbf{v}_1 \Rightarrow k_1 = k_2$

4.1.2. O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

Definição 116. Espaço vetorial $\mathbb{R}^n$
Representa-se por $\mathbb{R}^n$, onde n é um número natural qualquer, o conjunto de todas as n-úplas ordenadas de números reais e prova-se que o conjunto de vetores de $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$, pois estão definidas

- A existência e unicidade da operação interna adição de vetores de $\mathbb{R}^n$, com as respetivas propriedades.

- A existência e unicidade da operação externa multiplicação de um escalar real por um vetor de $\mathbb{R}^n$, com as respetivas propriedades.

Os seguintes conjuntos são, também, espaços lineares sobre o corpo $\mathbb{R}$.

- O conjunto dos polinómios de coeficientes reais de grau não superior a $n \in \mathbb{N}$.
- O conjunto dos polinómios de coeficientes complexos de grau não superior a $n \in \mathbb{N}$.
- O conjunto $\mathcal{M}$, das matrizes reais do tipo $m \times n$.
- O conjunto de funções reais de variável real definidas num certo domínio.
- O conjunto de funções reais contínuas num ponto.
- O conjunto de funções diferenciais de variável real num certo intervalo.
- O conjunto de funções diferenciais de variável real num ponto.
- O conjunto de funções integrais de variável real num certo intervalo.
- O conjunto de sucessões reais convergentes para zero.
- O conjunto de sucessões reais convergentes.
- etc.

Os seguintes conjuntos não são espaços lineares sobre o corpo $\mathbb{R}$

- O conjunto dos números racionais.
- O conjunto dos n-úplos de números racionais.
- O conjunto de sucessões reais convergentes para $L \neq 0$.
- O conjunto dos números reais não negativos.
- O conjunto dos n-úplos que são soluções de um sistema de equações lineares de variável real não homogéneas.
- O conjunto de funções reais descontínuas num ponto.
- O conjunto de funções reais que, num ponto, tomam um valor não nulo.
- etc.

Exemplo 95.
Averigúe se o conjunto dos pares ordenados $V = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

- Verificação da axiomática de existência e unicidade da operação interna adição de pares ordenados de $\mathbb{R}^2$, com as suas propriedades

  $\mathbf{A}_1$ Determinação

  $$\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V : (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \in V$$

  $\mathbf{A}_2$ Associatividade

  $$\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V : (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$$

  $\mathbf{A}_3$ Comutatividade

  $$\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V : \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1$$

(continuação)

A$_3$ Comutatividade

$$\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V : \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1$$

A$_4$ Existência de elemento neutro, o vetor nulo $\mathbf{o}$

$$\exists^1 \mathbf{o} \in V, \forall \mathbf{v}_1 \in V : \mathbf{v}_1 + \mathbf{o} = \mathbf{o} + \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$$

A$_5$ Existência de elemento oposto de $\mathbf{v}$, o vetor $(-\mathbf{v})$

$$\forall \mathbf{v}_1 \in V, \exists^1 (-\mathbf{v}_1) \in V : \mathbf{v}_1 + (-\mathbf{v}_1) = (-\mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_1 = \mathbf{o}$$

- Verificação da axiomática de existência e unicidade da operação externa, multiplicação de um escalar real por um par ordenado de $\mathbb{R}^2$, com as suas propriedades

M$_1$ Determinação

$$\forall k_1 \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v}_1 \in V : (k_1 \mathbf{v}_1) \in V$$

M$_2$ Associatividade mista

$$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v}_1 \in V : (k_1 k_2)\, \mathbf{v}_1 = k_1\, (k_2 \mathbf{v}_1)$$

M$_3$ Distributividade da multiplicação de um escalar real em relação à adição de vetores

$$\forall k_1 \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V : k_1\, (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = k_1 \mathbf{v}_1 + k_1 \mathbf{v}_2$$

M$_4$ Distributividade da multiplicação de vetores em relação à adição de escalares reais

$$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v}_1 \in V : (k_1 + k_2)\, \mathbf{v}_1 = k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_1$$

M$_5$ Existência de elemento neutro da operação externa, o escalar 1

$$\forall \mathbf{v}_1 \in V : 1 \times \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$$

Verificadas todas as propriedades, pode afirmar-se que o conjunto V é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

4.2. Subespaço vetorial

Definição 117. Subespaço vetorial

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e A um seu subconjunto não vazio. Diz-se que A *é um subespaço vetorial de* V se e só se A é um espaço vetorial.

Teorema 8. *A é um subespaço vetorial de V se, e só se, são verificados os três axiomas*

A$_1$ O vetor nulo pertence a A

$$\mathbf{o} \in A$$

A_2 A é fechado relativamente à adição de vetores

$$\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in A : \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in A$$

A_3 A é fechado relativamente à multiplicação de um escalar por um vetor

$$\forall k \in \mathbb{K}, \forall \mathbf{v}_1 \in A : (k\mathbf{v}_1) \in A$$

Se V é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e se A e B são dois subespaços de V, então são verificadas as seguintes propriedades

Tabela 4.4.: Propriedades dos subespaços vetoriais.

	Propriedade
P1	A interseção $A \cap B$ é, ainda, um subespaço vetorial de V
P2	A união $A \cup B$é um subespaço vetorial de Vse e só se $A \subseteq B \vee B \subseteq A$
P3	O conjunto solução do sistema homogéneo que tem $\mathbf{A}_{m \times n}$por matriz dos coeficientes, $CS_{\mathbf{AX}=\mathbf{0}}$, é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. (P3)

$CS_{AX=0}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, logo $CS_{AX=0}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$, pois verifica as 3 condições.

- O vetor nulo está em $CS_{AX=0}$

De facto, como o sistema é homogéneo, admite sempre a solução nula, $\mathbf{o} \in CS_{AX=0}$.

$-\forall u, v \in CS_{AX=0},\ u + v \in CS_{AX=0}$

Se $u, v \in CS_{AX=0}$, então $Au = Av = 0$. Logo, $A(u+v) = Au + Av = 0 + 0 = 0$ e $(u+v)$ é, também, solução do sistema.

$-\forall k \in \mathbb{R}, \forall u \in CS_{AX=0},\ ku \in CS_{AX=0}$?

Se $k \in \mathbb{R}, \forall u \in CS_{AX=0}$, então $Au = 0$. Logo, $A(ku) = kAu = k0 = 0$ e ku é, também, solução do sistema. □

Exemplo 96.

Pode provar-se que o conjunto $A = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b = 3a\}$ é um subespaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

Para isso, considere-se $\begin{cases} \mathbf{v}_1 = (a_1, b_1) = (a_1, 3a_1) \\ \mathbf{v}_2 = (a_2, b_2) = (a_2, 3a_2) \end{cases}$

(continuação)

1. Verificação da existência de elemento neutro para a adição de vetores

   $\mathbf{o} \in A$?

   $$\begin{cases} \mathbf{o} & = (0,0) \\ & = (0, 3 \times 0) \in A \end{cases}$$

2. Verificação das propriedades da operação interna, adição de vetores

   $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in A : (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \in A$?

   $$\begin{cases} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 & = (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2) \\ & = (a_1 + a_2,\ 3a_1 + 3a_2) \\ & = ((a_1 + a_2),\ 3(a_1 + a_2)) \in A \end{cases}$$

3. Verificação das propriedades da operação multiplicação de um escalar por um vetor

   $\forall k \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v}_1 \in A : (k\mathbf{v}_1) \in A$?

   $$k\mathbf{v}_1 = k(a_1, b_1) = k(a_1, 3a_1) = (ka_1, 3(ka_1)) \in A$$

Logo, verificadas as condições 1, 2 e 3, conclui-se que o conjunto $A = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : b = 3a\}$ é um subespaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

Exemplo 97.

O conjunto $A = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : b = 3\}$ não é um subespaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$, pois não verifica a existência de elemento neutro para a adição de vetores

$$\begin{cases} \mathbf{o} & = (0,0) \\ & \neq (0,3) \notin A \end{cases}$$

4.2.1. Soma direta de subespaços

Definição 118. Soma de subespaços

Sejam V_1 e V_2 dois subespaços do espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$. Define-se *soma* dos subespaços V_1 e V_2 como sendo

$$V = V_1 + V_2 = \{u_1 + u_2 : u_1 \in V_1 \wedge u_2 \in V_2\} \tag{4.1}$$

Definição 119. Soma direta de subespaços

Define-se *soma direta* dos subespaços V_1 e V_2 como sendo

$$V = V_1 \oplus V_2 : \begin{cases} V = V_1 + V_2 \\ V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{o}\} \end{cases} \tag{4.2}$$

Exemplo 98.

O conjunto $\mathcal{M}_1$ das matrizes simétricas e de ordem n e o conjunto $\mathcal{M}_2$ das matrizes antissimétricas e de ordem n são subespaços e a sua soma direta $\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$ é o conjunto $\mathcal{M}_n$ das matrizes quadradas de ordem n, (tabela 2.12).

Exemplo 99.

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y=0 \wedge z=y\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$, pois verifica as seguintes condições

1. $(0,0,0) \in A$?

   Como $0+0=0$ e $0=0$, tem-se $(0,0,0) \in A$

2. $\forall u, v \in A,\ u+v \in A$?

   $x+y=0 \wedge z=y \Leftrightarrow x=-y \wedge z=y$. Logo, $(x,y,z) \in A$ sse $(x,y,z)=(-y,y,y)$.

   $$\begin{aligned} u=(x,y,z) \in A &\Leftrightarrow u=(-y,y,y) \\ v=(x',y',z') \in A &\Leftrightarrow v=(-y',y',y') \\ u+v &= (-y,y,y)+(-y',y',y') \\ &= (-y-y',y+y',y+y') \\ &= (-(y+y'),y+y',y+y') \in A \end{aligned}$$

3. $\forall u \in A, \forall k \in \mathbb{R},\ ku \in A$

   $ku = k(-y,y,y) = (-ky,ky,ky)(-(ky),ky,ky) \in A$

Exemplo 100.

O conjunto $F = \{\mathbf{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : \mathbf{A} = \mathbf{A}^T\}$ é um subespaço de$M_{n\times n}(\mathbb{R})$, pois verifica também os 3 axiomas

1. Se $\mathbf{O}_{n\times n} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $\mathbf{O} = \mathbf{O}^T$, então $\mathbf{O}_{n\times n} \in F$.
2. Se $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in F$ e $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ e $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T$, então $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = \mathbf{A}+\mathbf{B}$. Logo, $\mathbf{A}+\mathbf{B} \in F$.
3. Se $\mathbf{A} \in F$ e $k \in \mathbb{R}$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ e $(k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T = k\mathbf{A}$, então $k\mathbf{A} \in F$.

Exemplo 101.

O conjunto $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\}$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$, pois não verifica a condição de existência de elemento neutro: $\mathbf{o} = (0,0) \notin F$

4.3. Combinação linear de vetores

Definição 120. Combinação linear

Seja $n \in \mathbb{N}$, V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ um subconjunto de V. Diz-se que um vetor $\mathbf{v}_n \in V$ é *combinação linear* dos $(n-1)$ vetores restantes se, e só se, existirem $(n-1)$ escalares, $k_1, k_2, k_3, \cdots, k_{n-1}$, desse corpo, tais que

$$\mathbf{v}_n = \sum_{i=1}^{n-1} (k_i \mathbf{v}_i) = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_{n-1}\mathbf{v}_{n-1} \tag{4.3}$$

ou seja

$$\begin{aligned}
&(a_1, \cdots, a_{(n-1)}) = k_1 \left(b_{11}, \cdots, b_{(n-1)1}\right) + \cdots + k_{(n-1)} \left(b_{1(n-1)}, \cdots, b_{(n-1)(n-1)}\right) \\
&= \left(k_1 b_{11}, \cdots, k_1 b_{(n-1)1}\right) + \cdots + \left(k_{(n-1)} b_{1(n-1)}, \cdots, k_{(n-1)} b_{(n-1)(n-1)}\right) \\
&= \left(\left(k_1 b_{11} + \cdots + k_{(n-1)} b_{1(n-1)}\right), \cdots, \left(k_1 b_{(n-1)1} + \cdots +, k_{(n-1)} b_{(n-1)(n-1)}\right)\right)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{cases}
a_1 & = k_1 b_{11} + k_2 b_{12} + k_{(n-1)} b_{1(n-1)} \\
a_2 & = k_1 b_{21} + k_2 b_{22} + k_{(n-1)} b_{2(n-1)} \\
\cdots\cdots & \\
a_{(n-1)} & = k_1 b_{(n-1)1} + k_2 b_{(n-1)2} + k_{(n-1)} b_{(n-1)(n-1)}
\end{cases} \tag{4.5}$$

A representação matricial deste sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1(n-1)} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{(n-1)1} & b_{(n-1)2} & \cdots & b_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{(n-1)} \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

Se este sistema for possível, os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_{n-1}$ são combinação linear de $\mathbf{v}_n$.

O vetor nulo $\mathbf{o} \in V$ é sempre combinação linear de quaisquer vetores de V.

Exemplo 102.

O vetor $\mathbf{v}_4 = (8, 13, 9)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$. De facto, pela equação 4.3, ter-se-á

$$\begin{aligned}
&k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_4 \\
&k_1 (1, 0, 0) + k_2 (0, 1, 0) + k_3 (0, 0, 1) = (8, 13, 9) \\
&(k_1, 0, 0) + (0, k_2, 0) + (0, 0, k_3) = (8, 13, 9) \\
&(k_1, k_2, k_3) = (8, 13, 9) \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 8 \\ k_2 = 13 \\ k_3 = 9 \end{cases}
\end{aligned}$$

Como este sistema é possível e determinado, então $\mathbf{v}_4$ é combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$, sendo a combinação linear dada por: $\mathbf{v}_4 = 8\mathbf{v}_1 + 13\mathbf{v}_2 + 9\mathbf{v}_3$.

Exemplo 103.

Sendo $\mathbf{u} = (1, -3, 2)$ e $\mathbf{v} = (2, -1, 1)$

1. O vetor $\mathbf{w}_1 = (2, -5, 4)$ não é combinação linear de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

   De facto,

   $$\mathbf{w}_1 = k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{v}$$

   $$(2, -5, 4) = k_1(1, -3, 2) + k_2(2, -1, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + 2k_2 = 2 \\ -3k_1 - k_2 = -5 \\ 2k_1 + k_2 = 4 \end{cases}$$

   $$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2=L_2+3L_1 \\ L_3=L_3-2L_1}}{} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \underset{L_2=L_2+2L_3}{} \sim$$

   $$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3=L_3-3L_2}{} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

   O sistema é impossível, logo não se pode exprimir $\mathbf{w}_1$ como combinação linear de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

2. O vetor $\mathbf{w}_2 = (1, 7, -4)$ é combinação linear de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

   De facto,

   $$\mathbf{w}_2 = k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{v}$$

   $$(1, 7, -4) = k_1(1, -3, 2) + k_2(2, -1, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + 2k_2 = 1 \\ -3k_1 - k_2 = 7 \\ 2k_1 + k_2 = -4 \end{cases}$$

   $$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & -4 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2=L_2+3L_1 \\ L_3=L_3-3L_2}}{} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & -3 & -6 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2=\frac{1}{5}L_2 \\ L_2=-\frac{1}{3}L_2}}{} \sim$$

   $$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \underset{L_3=L_3-L_2}{} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = -3 \\ k_2 = 2 \end{cases}$$

   Então, $\mathbf{w}_2$ é combinação linear de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$: $\mathbf{w}_2 = -3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$.

4.3.1. Independência e dependência linear

Definição 121. Independência e dependência linear

Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n$ vetores de um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$. Diz-se que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n$ são vetores *linearmente independentes* se, e só se, for única a solução do seguinte sistema homogéneo

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{o} \tag{4.7}$$

Se o sistema admitir mais do que uma solução, os vetores dizem-se *linearmente dependentes.*

A representação matricial deste sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

Neste contexto, diz-se que os n vetores são

- *Linearmente independentes* se o sistema homogéneo só possui a solução trivial, isto é, se for um sistema possível e determinado. Neste caso, nenhum dos vetores poderá ser escrito como combinação dos $(n-1)$ vetores restantes.
- *Linearmente dependentes* se o sistema homogéneo possui solução não trivial, isto é, se for um sistema possível e indeterminado. Neste caso, pelo menos um dos vetores pode ser escrito como combinação dos $(n-1)$ vetores restantes.

Prova-se que a dependência (ou independência) de um conjunto de n vetores de um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$ não é alterada quando

1. Se permutam entre si dois vetores desse conjunto.
2. Se multiplica um dos vetores desse conjunto por um escalar não nulo.
3. Se substitui um vetor desse conjunto por um outro obtido como combinação linear dos restantes vetores do conjunto.

Exemplo 104.

Os vetores $\mathbf{v}_1 = (1,2)$ e $\mathbf{v}_2 = (0,0)$ são linearmente dependentes, pois

$$k_1(1,2) + k_2(0,0) = (0,0).$$

A representação matricial deste sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A resolução deste sistema de equações lineares, pelo método da condensação, é dada por

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{array}\right]_{L_2 = L_2 - 2L_1} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Como $\operatorname{car}(\mathbf{A}) = \operatorname{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 1$, o sistema é possível e indeterminado, pelo que os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são linearmente dependentes.

Exemplo 105.

Os vetores $\mathbf{v}_1 = (1,2,-2)$, $\mathbf{v}_2 = (2,5,-4)$ e $\mathbf{v}_3 = (3,7,-5)$ são linearmente independentes, pois, pela equação 4.7,

$$k_1(1,2,-2) + k_2(2,5,-4) + k_3(3,7,-5) = (0,0,0)$$

A representação matricial deste sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A resolução deste sistema de equações lineares, pelo método da condensação, é dada por

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 0 \\ -2 & -4 & -5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2 = L_2 - 2L_1 \\ L_3 = L_3 + 2L_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Como $\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 3$, o sistema é possível e determinado, pelo que $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Logo, os vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ são linearmente independentes.

Teorema 9. *Qualquer vetor isolado não nulo é linearmente independente.*

Teorema 10. *Prova-se que, se* $\mathbf{v}$ *é um vetor do espaço vetorial* V *sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *, e* $\dim(V) = n$*, então* $\mathbf{v}$ *define-se de uma forma única como combinação linear de* n *vetores linearmente independentes de* V.

Teorema 11. *Se* n *vetores não nulos* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n$ *de um espaço vetorial* V *sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *são linearmente independentes, então também o é qualquer subconjunto de* $p < n$ *desses vetores de* V*.*

Teorema 12. *Se no conjunto de* n *vetores* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n$ *de um espaço vetorial* V *sobre um corpo* $\mathbb{K}$*, um deles é o vetor nulo, então aqueles vetores são linearmente dependentes.*

Teorema 13. *Se no conjunto de* n *vetores não nulos* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n$ *de um espaço vetorial* V *sobre um corpo* $\mathbb{K}$*, um deles é combinação linear dos outros, então aqueles vetores são linearmente dependentes.*

Teorema 14. *Se o conjunto de* n *vetores não nulos* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n$ *de um espaço vetorial* V *sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *são linearmente dependentes, então também o é qualquer subconjunto de* V *que contenha esses vetores.*

Se as linhas (ou colunas) de uma matriz real $\mathbf{A}_{m \times n}$ corresponderem a vetores de um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$, o número de vectores linearmente independentes é dado pelo valor de $\text{car}(\mathbf{A})$.

Demonstração. (Teorema 13)
Se no conjunto de n vetores não nulos $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n$ de um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$, um deles é combinação linear dos outros, então seja, por exemplo, $\mathbf{v}_1$ combinação linear dos outros

$$\mathbf{v}_1 = k_2 + k_3\mathbf{v}_3 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n \Leftrightarrow \mathbf{v}_1 - k_2\mathbf{v}_2 - k_3\mathbf{v}_3 - \cdots - k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{o}$$

e, por isso, o sistema homogéneo $k_1v_1 + k_2 + k_3\mathbf{v}_3 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{o}$ possui solução não trivial, admitindo, por exemplo, a solução $k_1 = 1$; $k_2 = -\alpha_2$; $k_3 = -\alpha_3$; $\cdots$; $k_n = -\alpha_n$. Neste caso, os vetores são linearmente dependentes. □

Interpretação geométrica da Independência Linear

- Em $\mathbb{R}^2$, um conjunto de 2 vetores é linearmente independente se, e só se, os vetores não estão numa mesma reta quando colocados com os seus pontos iniciais na origem. Logo, 2 vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ são linearmente independentes se nenhum dos vetores é um múltiplo do outro, isto é, se, e só se, não existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$
- Em $\mathbb{R}^3$, um conjunto de 3 vetores é linearmente independente se, e só se, os vetores não estão num mesmo plano quando colocados com os seus pontos iniciais na origem. Logo, 3 vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ são linearmente independentes se nenhum dos vetores é combinação linear dos restantes.

4.3.2. Vetores geradores de um espaço vetorial

Definição 122. Vetores geradores e espaço gerado
Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$ e $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ um conjunto de vetores de V. Diz-se que os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n$ são geradores de V ou que V é gerado pelos vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n$, e representa-se simbolicamente por $V =< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n >$, se é possível escrever um qualquer vetor $\mathbf{v} \in V$ como combinação linear destes vetores.

Cada conjunto só pode gerar um único subespaço. Contudo, conjuntos distintos podem gerar o mesmo subespaço, pelo que cada subespaço pode ter vários conjuntos de geradores.

Teorema 15. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n$ vetores de V. A dimensão do espaço gerado pelos vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n$ é igual à característica da matriz que tem por colunas esses vetores.*

Exemplo 106.

O espaço $\mathbb{R}^2$ é gerado pelo conjunto $V_1 = \{(1,0), (0,1)\}$, pois todos os vetores de V_1 são combinação linear dos vetores $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ e $\mathbf{e}_2 = (0,1)$. De facto,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & o & a \\ 0 & 1 & b \end{array}\right]$$

Como $\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 2$ para qualquer valor de a e b e $GI = 0$, este sistema é um sistema possível e determinado, pelo que $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ geram $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 107.

O espaço $\mathbb{R}^2$ é gerado pelo conjunto $V_2 = \{(1,1),(0,1)\}$, pois todos os vetores de $\mathbb{R}^2$ se podem escrever como combinação linear de $\mathbf{v}_1 = (1,1)$ e $\mathbf{v}_2 = (0,1)$.
De facto, atendendo à representação matricial deste sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

A resolução deste sistema de equações lineares, pelo método da condensação, é dada por

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & b \end{array}\right]_{l_2 = l_2 - l_1} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b-a \end{array}\right]$$

Como a car $(\mathbf{A}) =$ car $([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 2$ para qualquer valor de a e b e $GI = 0$, este sistema é um sistema possível e determinado, pelo que os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são geradores do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$.

4.4. Base e dimensão de um espaço vetorial

4.4.1. Base de um espaço vetorial

Definição 123. Base de um espaço vetorial

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Diz-se que o subconjunto $V_1 \subset V$ é uma *base do espaço vetorial* V se, e só se

1. V_1 for um conjunto de vetores linearmente independentes
2. V_1 for um conjunto de vetores geradores de V

Teorema 16. *Todo o espaço vetorial $V_1 \neq \{\mathbf{o}\}$ sobre um corpo $\mathbb{K}$ tem, pelo menos, uma base.*

Teorema 17. *Seja V* um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. *Um qualquer subconjunto V_1 do espaço vetorial V é uma base de V se, e só se, cada vetor de V puder ser escrito de forma única como combinação linear dos vetores de V_1, isto é, se o sistema representado em 4.7 for um sistema possível e determinado.*

Definição 124. Base ordenada

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Chama-se *base ordenada* do espaço vetorial V ao conjunto ordenado de vetores de uma base desse espaço vetorial. Com a base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ podem formar-se $n!$ bases ordenadas de V, por exemplo, as bases ordenadas $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n\}$, $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n\}$, $\{\mathbf{v}_n, \cdots, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1\}$, $\cdots$.

Definição 125. Coordenadas de um vetor

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ uma base ordenada de V e $\mathbf{v}$ um vetor de V. Chamam-se *coordenadas do vetor* $\mathbf{v}$ na base ordenada $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ aos escalares $k_1, k_2, k_3, \cdots, k_n$ da combinação linear $\sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{v}$.

Exemplo 108.

Os vetores $\mathbf{v}_1 = (1,0)$ e $\mathbf{v}_2 = (2,3)$ formam uma base de $\mathbb{R}^2$, pois

- São linearmente independentes

  $$\sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{o}$$

  $$k_1 (1,0) + k_2 (2,3) = (0,0)$$

  $$(k_1, 0) + (2k_2, 3k_2) = (0,0)$$

  $$((k_1 + 2k_2), 3k_2) = (0,0)$$

  $$\begin{cases} k_1 + 2k_2 = 0 \\ 3k_2 = 0 \end{cases}$$

  Como este sistema é possível e determinado, os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são linearmente independentes.

- Geram $\mathbb{R}^2$

  $$\sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{v}$$

  $$k_1 (1,0) + k_2 (2,3) = (a,b)$$

  $$(k_1, 0) + (2k_2, 3k_2) = (a,b)$$

  $$((k_1 + 2k_2), 3k_2) = (a,b)$$

  $$\begin{cases} k_1 + 2k_2 = a \\ 3k_2 = b \end{cases}$$

  Como este sistema é possível e determinado, os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são geradores de de $\mathbb{R}^2$

Logo, como os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são linearmente independentes e geradores, formam uma base de $\mathbb{R}^2$

4.4.2. Dimensão de um espaço vetorial

Teorema 18. *Seja V* um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. V pode ter várias bases, mas todas as bases de um dado espaço vetorial têm o mesmo número de elementos.

Definição 126. Dimensão de um espaço vetorial

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Chama-se *dimensão do espaço vetorial* V, e designa-se por $\dim(V)$, ao número de vetores que constituem uma qualquer base desse espaço vetorial.

A dimensão de um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$ verifica as propriedades:

Tabela 4.5.: Propriedades da dimensão de um espaço vetorial.

Propriedade	
P1	O espaço vetorial V diz-se de dimensão finita se é gerado por um conjunto finito de vetores, caso contrário, diz-se de dimensão infinita
P2	Se $V = \{o\}$, então $\dim(V) = 0$
P3	Se a dimensão de V é n, qualquer conjunto de $n+1$ vetores de V é sempre um conjunto de vetores linearmente dependentes
P4	Se a dimensão de V é n, qualquer conjunto de vetores linearmente independentes tem no máximo n vetores de V
P5	A dimensão de $\mathbb{R}^n$ é n e das matrizes reais do tipo $\mathcal{M}_{m\times n}$ é $m \times n$
P6	Se a dimensão de V é n, qualquer conjunto de n vetores linearmente independentes de V também gera V e, por isso, é uma base de V
P7	Se a dimensão de V é n, qualquer conjunto de n vetores que gerem V também são linearmente independentes e, por isso, formam uma base de V

Definição 127. Espaço cartesiano real

Chama-se *espaço cartesiano real de dimensão n* ao espaço vetorial de dimensão finita n sobre o corpo $\mathbb{R}$.

Exemplo 109.

- O espaço vetorial das matrizes 2×2 de coeficientes reais tem dimensão 4

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- O espaço vetorial das matrizes 2×3 de coeficientes reais tem dimensão 6

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+d\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + e\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + f\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 110.
Indique uma base do espaço vetorial $V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2x + 3y\}$

Este espaço vetorial V_1 pode ser reescrito como $V_1 = \{(x,y,(2x+3y)) \in \mathbb{R}^3\}$, pelo que tem dimensão 2 correspondente às 2 variáveis livres.
Considerando 2 vetores de V_1, por exemplo, $\mathbf{v}_1 = (1,-1,-1)$ e $\mathbf{v}_2 = (0,1,3)$

- verificação de que os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são geradores do espaço vetorial de V_1

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{v}_i$$

$$(a,b,2a+3b) = k_1(1,-1,-1) + k_2(0,1,3)$$

$$(a,b,2a+3b) = (k_1,-k_1,-k_1) + (0,k_2,3k_2)$$

$$(a,b,2a+3b) = (k_1,-k_1+k_2,(-k_1+3k_2))$$

$$\begin{cases} k_1 = a \\ -k_1 + k_2 = b \\ -k_1 + 3k_2 = 2a+3b \end{cases}$$

A resolução deste sistema, pelo método da condensação, é dada por

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ -1 & 1 & b \\ -1 & 3 & 2a+3b \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2 = L_2 + L_1 \\ L_3 = L_3 + L_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & a+b \\ 0 & 3 & 3a+3b \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3 = L_3 - 3L_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Como $\operatorname{car}(\mathbf{A}) = \operatorname{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 2$ para qualquer valor de a e b e $GI = 0$, então este sistema é um sistema possível e determinado, pelo que os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são geradores de um espaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

- verificação de que os vetores $\mathbf{v}_1 = (1,0,1)$ e $\mathbf{v}_2 = (0,1,1)$ são linearmente independentes

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{o}$$

$$k_1(1,-1,-1) + k_2(0,1,3) = (0,0,0)$$

$$(k_1,-k_1,-k_1) + (0,k_2,3k_2) = (0,0,0)$$

$$(k_1,-k_1+k_2,(-k_1+3k_2)) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} k_1 = 0 \\ -k_1 + k_2 = 0 \\ -k_1 + 3k_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = 0 \end{cases}$$

Como este sistema é possível e determinado, os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são linearmente independentes.

Logo, os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ formam uma base de V_1.

Definição 128. Base canónica

Chama-se *base canónica de um espaço vetorial* V *de dimensão* n à base cujos vetores são as colunas da matriz identidade de ordem n.

- Uma *base canónica do espaço vetorial* $\mathbb{R}^2$ é formada pelos vetores $\mathbf{v}_1 = (1,0)$ e $\mathbf{v}_2 = (0,1)$
- Uma *base canónica do espaço vetorial* $\mathbb{R}^3$ é formada pelos vetores $\mathbf{v}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,0)$ e $\mathbf{v}_3 = (0,0,1)$
- Uma *base canónica do espaço vetorial* $\mathbb{R}^n$ é formada pelos vetores $\mathbf{v}_1 = (1,0,\cdots,0)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,\cdots,0)$, $\cdots$, $\mathbf{v}_n = (0,0,\cdots,1)$

4.4.3. Matriz de mudança de base

Considerem-se duas bases de um mesmo espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$ formadas pelos conjuntos de n vetores $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ e $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n\}$, respetivamente. Um qualquer vetor $\mathbf{w} \in V$ pode ser representado por combinação linear dos n vetores de cada uma destas duas bases do seguinte modo

$$[\mathbf{w}]_U = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_n\mathbf{u}_n \tag{4.9}$$

ou

$$[\mathbf{w}]_V = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_n\mathbf{v}_n \tag{4.10}$$

onde os coeficientes da combinação linear $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ representam as coordenadas do vetor $\mathbf{w}$ na base U e os coeficientes da combinação linear $b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots, b_n$ representam as coordenadas do vetor $\mathbf{w}$ na base V. Contudo, os n vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n$ também podem ser escritos como combinação vetorial dos de n vetores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \cdots, \mathbf{u}_n$

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 &= m_{11}\mathbf{u}_1 + m_{12}\mathbf{u}_2 + m_{13}\mathbf{u}_3 + \ldots + m_{1n}\mathbf{u}_n \\ \mathbf{v}_2 &= m_{21}\mathbf{u}_1 + m_{22}\mathbf{u}_2 + m_{23}\mathbf{u}_3 + \ldots + m_{2n}\mathbf{u}_n \\ \cdots &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{v}_n &= m_{n1}\mathbf{u}_1 + m_{n2}\mathbf{u}_2 + m_{n3}\mathbf{u}_3 + \ldots + m_{nn}\mathbf{u}_n \end{cases} \tag{4.11}$$

onde m_{ij} representam as coordenadas de cada vetor $\mathbf{v}_i$ na base $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \cdots, \mathbf{u}_n\}$. Este sistema pode ser representado matricialmente por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \ldots \\ \mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \ldots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \ldots & m_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{n1} & m_{n2} & \ldots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \ldots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

Se $\mathbf{M}_{U\to V}$ é a matriz quadrada de ordem n e regular, que representa a matriz de mudança da base $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ para a base $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n\}$, então

$$V = \mathbf{M}_{U\to V}\, U \tag{4.13}$$

A matriz $\mathbf{M}_{V\to U}$ é obtida através da determinação dos escalares m_{ij} da combinação linear do seguinte modo

$$\left\{\begin{array}{ll}
 & v_{11} = m_{11}u_{11} + m_{12}u_{12} + m_{13}u_{13} + ... + m_{1n}u_{1n} \\
1^{a}eq.: & v_{21} = m_{11}u_{21} + m_{12}u_{22} + m_{13}u_{23} + ... + m_{1n}u_{2n} \\
 & \cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
 & v_{n1} = m_{11}u_{n1} + m_{12}u_{n2} + m_{13}u_{n3} + ... + m_{1n}u_{nn} \\
 & \\
 & v_{12} = m_{21}u_{11} + m_{22}u_{12} + m_{23}u_{13} + ... + m_{2n}u_{1n} \\
2^{a}eq.: & v_{22} = m_{21}u_{21} + m_{22}u_{22} + m_{23}u_{23} + ... + m_{2n}u_{2n} \\
 & \cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
 & v_{n2} = m_{21}u_{n1} + m_{22}u_{n2} + m_{23}u_{n3} + ... + m_{2n}u_{nn} \\
 & \\
\cdots\cdots\cdots & \\
 & \\
 & v_{1n} = m_{n1}u_{11} + m_{n2}u_{12} + m_{n3}u_{13} + ... + m_{nn}u_{1n} \\
n^{ésima}eq.: & v_{2n} = m_{n1}u_{21} + m_{n2}u_{22} + m_{n3}u_{23} + ... + m_{nn}u_{2n} \\
 & \cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
 & v_{nn} = m_{n1}u_{n1} + m_{n2}u_{n2} + m_{n3}u_{n3} + ... + m_{nn}u_{nn}
\end{array}\right. \tag{4.14}$$

o que corresponde a

$$\left\{\begin{array}{ll}
1^{a}eq.: & \left[\begin{array}{ccccc|c} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} & v_{11} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} & v_{21} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{n1} & u_{n2} & u_{n3} & \cdots & u_{nn} & v_{n1} \end{array}\right] \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m_{11} \\ m_{12} \\ \cdots \\ m_{1n} \end{array}\right. \\
 & \\
2^{a}eq.: & \left[\begin{array}{ccccc|c} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} & v_{12} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} & v_{22} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{n1} & u_{n2} & u_{n3} & \cdots & u_{nn} & v_{n2} \end{array}\right] \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m_{21} \\ m_{22} \\ \cdots \\ m_{2n} \end{array}\right. \\
 & \\
\cdots\cdots\cdots & \\
 & \\
n^{ésima}eq.: & \left[\begin{array}{ccccc|c} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} & v_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} & v_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{n1} & u_{n2} & u_{n3} & \cdots & u_{nn} & v_{nn} \end{array}\right] \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m_{n1} \\ m_{n2} \\ \cdots \\ m_{nn} \end{array}\right.
\end{array}\right. \tag{4.15}$$

pelo que a matriz $\mathbf{M}_{V\to U}$, de mudança da base $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ para a base $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \cdots, \mathbf{u}_n\}$, pode ser facilmente obtida através da resolução do sistema pelo método da condensação de acordo com o seguinte algoritmo

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} & v_{11} & v_{12} & v_{13} & \cdots & v_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} & v_{21} & v_{22} & v_{23} & \cdots & v_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{n1} & u_{n2} & u_{n3} & \cdots & u_{nn} & v_{n1} & v_{n2} & v_{n3} & \cdots & v_{nn} \end{array}\right] \sim \ldots$$

$$\ldots \sim \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & m_{21} & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & m_{nn} \end{array}\right] \tag{4.16}$$

isto é

$$\left[\begin{array}{c|c} U & V \end{array}\right] \underset{\substack{\text{operações} \\ \text{elementares} \\ \text{sobre linhas}}}{\sim} \left[\begin{array}{c|c} I & \mathbf{M}_{V\to U} \end{array}\right] \tag{4.17}$$

Do mesmo modo se poderá escrever a matriz de mudança da base $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ para a base $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ a partir de

$$\mathbf{M}_{U\to V} = \mathbf{M}_{V\to U}^{-1} \tag{4.18}$$

Contudo, se se substituir $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n$ em 4.10, ter-se-á

$$\mathbf{w} = b_1 \left(m_{11}\mathbf{u}_1 + m_{12}\mathbf{u}_2 + \ldots\ldots + m_{1n}\mathbf{u}_n\right) + \ldots + b_n \left(m_{n1}\mathbf{u}_1 + m_{n2}\mathbf{u}_2 + \ldots\ldots + m_{nn}\mathbf{u}_n\right) \tag{4.19}$$

ou seja

$$\mathbf{w} = \left(b_1 m_{11} + b_2 m_{21} + \ldots\ldots + b_n m_{n1}\right)\mathbf{u}_1 + \ldots + \left(b_1 m_{1n} + b_2 m_{2n} + \ldots\ldots + b_n m_{nn}\right)\mathbf{u}_n \tag{4.20}$$

Se se substituir 4.20 em 4.9, ter-se-á

$$\begin{cases} a_1 &= b_1 m_{11} + b_2 m_{21} + \ldots\ldots + b_n m_{n1} \\ a_2 &= b_1 m_{12} + b_2 m_{22} + \ldots\ldots + b_n m_{n2} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n &= b_1 m_{1n} + b_2 m_{2n} + \ldots\ldots + b_n m_{nn} \end{cases} \tag{4.21}$$

Este sistema pode ser representado matricialmente por

$$\left[\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ \ldots\ldots \\ a_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} m_{11} & m_{21} & \ldots & m_{n1} \\ m_{12} & m_{22} & \ldots & m_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{1n} & m_{2n} & \ldots & m_{nn} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{array}\right] \tag{4.22}$$

pelo que as coordenadas a_i do vetor $\mathbf{w}$ na base U podem ser relacionadas com as

coordenadas b_i do vetor $\mathbf{w}$ na base V do seguinte modo

$$\mathbf{a} = \mathbf{M}_{V\to U}\mathbf{b} \tag{4.23}$$

isto é

$$[\mathbf{w}]_U = \mathbf{M}_{V\to U}\,[\mathbf{w}]_V \tag{4.24}$$

e

$$\begin{aligned}[\mathbf{w}]_V &= \mathbf{M}_{U\to V}\,[\mathbf{w}]_U \\ &= \mathbf{M}^{-1}_{V\to U}\,[\mathbf{w}]_U\end{aligned} \tag{4.25}$$

onde

- $\mathbf{a}$ é o vetor das coordenadas $a_1, a_2, \cdots, a_n$ de $\mathbf{w}$ na base $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$, isto é $[\mathbf{w}]_V$
- $\mathbf{b}$ é o vetor das coordenadas $b_1, b_2, \cdots, b_n$ de $\mathbf{w}$ na base $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$, isto é $[\mathbf{w}]_V$
- $\mathbf{M}_{U\to V}$ é a matriz de mudança da base $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ para a base $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$
- $\mathbf{M}_{V\to U}$ é a matriz de mudança da base $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ para a base $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$

Exemplo 111.

Considere o espaço $\mathbb{R}^3$ e as bases U e V, tais que $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é dada por $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (4, 5, 6)$ e $\mathbf{v}_3 = (-1, 0, -2)$.

1. a matriz de mudança da base V para a base U é

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & -2 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{M}_{V\to U} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \end{array}\right].$$

2. a matriz de mudança da base U para a base V é
   $\mathbf{M}_{U\to V} = \mathbf{M}^{-1}_{V\to U}$

   logo

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right] \sim$$

(continuação)

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{10}{9} & \frac{2}{9} & \frac{5}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

donde $\mathbf{M}_{U\to V} = \begin{bmatrix} -\frac{10}{9} & \frac{2}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

3. as coordenadas de $\mathbf{w} = (2,2,1)_U$ na base V, utilizando a matriz de mudança de base $[\mathbf{w}]_V = \mathbf{M}_{U\to V}\,[\mathbf{w}]_U$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{10}{9} & \frac{2}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{9} \\ \frac{8}{9} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

4.5. Espaços vetoriais reais com produto interno

4.5.1. O produto interno em $\mathbb{R}^n$

Definição 129. Produto interno

Chama-se produto interno (ou escalar) de dois vetores do espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$, e representa-se por $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2$ ou $\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2$, à função que a cada par de vetores de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{v}_1 = (a_1, a_2, \cdots a_n)$ e $\mathbf{v}_2 = (b_1, b_2, \cdots b_n)$, associa o número real obtido por

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 = \sum_{i=1}^{n} (a_i b_i) \quad = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \end{cases} \tag{4.26}$$

e que verifica os seguintes 3 axiomas

A$_1$ Linearidade

$$\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^n, \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R} : (k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2)\,\mathbf{v}_3 = k_1\,(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3) + k_2\,(\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3)$$

A$_2$ Simetria (comutatividade)

$$\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1$$

A$_3$ Operação definida positivamente

$$\forall \mathbf{v}_1 \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v}_1\mathbf{v}_1 \geqslant 0 \wedge \mathbf{v}_1\mathbf{v}_1 = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \mathbf{o}$$

A notação matricial do produto interno de dois vetores é dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_2 \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n\end{aligned} \tag{4.27}$$

Definição 130. Espaço Euclidiano

Um espaço linear diz-se *espaço Euclidiano* se, e só se, é um espaço cartesiano (espaço linear real de dimensão finita n) e com produto interno real.

Exemplo 112.

- O produto interno dos vetores de $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{v}_1 = (1, -3, 4)$ e $\mathbf{v}_2 = (1, -5, 0)$ é $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 = 1 + 15 + 0 = 16$
- O produto interno dos vetores de $\mathbb{R}^4$, $\mathbf{v}_1 = (3, -1, 0, 1)$ e $\mathbf{v}_2 = (1, -5, 4, -8)$ é $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 = 3 + 5 + 0 - 8 = 0$

4.5.2. Álgebra linear sobre o corpo $\mathbb{R}$

Diz-se que o espaço linear V é uma *álgebra linear sobre o corpo* $\mathbb{R}$ (ou álgebra vetorial) se, e só se, são verificados os seguintes 5 axiomas

A$_1$ Axioma de fecho – existência e unicidade da operação interna multiplicação de vetores

$$\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V : \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 \in V$$

A$_2$ Propriedade associativa da multiplicação de vetores

$$\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V : \mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3)$$

A$_3$ Propriedade distributiva à direita da multiplicação em relação à adição de vetores

$$\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V : \mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2) + (\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3)$$

A$_4$ Propriedade distributiva à esquerda da multiplicação em relação à adição de vetores

$$\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V : (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)\, \mathbf{v}_3 = (\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3) + (\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3)$$

A$_5$ Propriedade associativa da multiplicação escalar por vetor

$$\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V, \forall k_1 \in \mathbb{R} : k_1 (\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2) = (k_1\mathbf{v}_1)\, \mathbf{v}_2 = k_1 (\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2)$$

$$\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V, \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R} : (k_1\mathbf{v}_1)\, (k_2\mathbf{v}_2) = (k_1k_2)\, (\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2)$$

Definição 131. Álgebra comutativa

Se $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V : \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1$, a álgebra linear sobre o corpo $\mathbb{R}$ diz-se uma álgebra comutativa.

4.5.3. Norma de um vetor

Seja vetor $\mathbf{v}$ do espaço vetorial real V. Se o produto interno é uma operação definida positiva, então existe uma função raiz de índice $\left(\frac{1}{p}\right)$, denominada de norma de ordem p (ou módulo ou comprimento) de um vetor $\mathbf{v}$, dada pelo número real não negativo tal que

$$\|\mathbf{v}\|_p : \begin{cases} V & \to \mathbb{R}_0^+ \\ \mathbf{v} & \to \left(\sum_{i=1}^{n} |\mathbf{v}_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{cases} \tag{4.28}$$

e que verifica os seguintes 4 axiomas

$\mathbf{A}_1$ $\forall \mathbf{v}_1 \in V,\ \|\mathbf{v}_1\| = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = 0$
$\mathbf{A}_2$ $\forall \mathbf{v}_1 \in V,\ \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{o} \Rightarrow \|\mathbf{v}_1\| > 0$
$\mathbf{A}_3$ $\forall \mathbf{v}_1 \in V, \forall k \in \mathbb{K},\ \|k\mathbf{v}_1\| = |k|\ \|\mathbf{v}_1\|$
$\mathbf{A}_4$ $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V,\ \|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\| \leq \|\mathbf{v}_1\| + \|\mathbf{v}_2\|$

Neste contexto, diz-se que um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial normado se em V está definida uma norma. As três normas mais usuais de um vetor $\mathbf{v} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ são

- norma 1: $\|\mathbf{v}\|_1 = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$
- norma 2: $\|\mathbf{v}\|_2 = \left(|a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots + |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$
- norma ∞: $\|\mathbf{v}\|_\infty = max\left\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|\right\}$

Exemplo 113.

As três normas mais usuais dos vetores $\mathbf{v}_1 = (1, -3, 4)$ e $\mathbf{v}_2 = (1+i, -i, 1-2i)$

- norma 1: $\|\mathbf{v}_1\|_1 = |1| + |-3| + |4| = 8$,
  $\|\mathbf{v}_2\|_1 = |1+i| + |-i| + |1-2i| = \sqrt{1+1} + \sqrt{1} + \sqrt{1+4} = \sqrt{2} + 1 + \sqrt{5}$
- norma 2: $\|\mathbf{v}_1\|_2 = \left(|1|^2 + |-3|^2 + |4|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{26}$, $\|\mathbf{v}_2\|_2 = \sqrt{2+1+5} = \sqrt{8}$
- norma ∞: $\|\mathbf{v}_1\|_\infty = \max\left\{|1|, |-3|, |4|\right\} = 4$, $\|\mathbf{v}_2\|_\infty = \max\left\{\sqrt{2}, 1, \sqrt{5}\right\} = \sqrt{5}$

Definição 132. Norma Euclidiana

Chama-se *norma euclidiana* de um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ao número real não negativo tal que

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{v}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.29}$$

isto é

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}\mathbf{v}} \quad \Leftrightarrow \quad \|\mathbf{v}\|^2 = |\mathbf{v}\mathbf{v}| \tag{4.30}$$

que verifica os seguintes 4 axiomas

A$_1$ (desigualdade de Schwartz ou inequação de Cauchy-Schwartz)

$$\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n, (\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2)^2 \leqslant (\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1)(\mathbf{v}_2\mathbf{v}_2) \quad \Leftrightarrow \quad |\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2| \leqslant \|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\|$$

A$_2$ (num triângulo, qualquer lado é maior do que a diferença dos outros dois)

$$|\|\mathbf{v}_1\| - \|\mathbf{v}_2\|| \leqslant \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|$$

A$_3$ (num paralelogramo, a soma dos quadrados das diagonais é igual à soma dos quadrados dos lados)

$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\|^2 + \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|^2 = 2\|\mathbf{v}_1\|^2 + 2\|\mathbf{v}_2\|^2$$

Exemplo 114.

- A norma euclidiana do vetor $\mathbf{v} = (1, 2)$ é dada por $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}$
- A norma euclidiana do vetor $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ é dada por $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

4.5.4. Ângulo entre dois vetores

Considere-se a desigualdade de Schwartz $|\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2| \leqslant \|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\|$ reescrita da seguinte forma

$$\frac{|\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2|}{\|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\|} \leqslant 1 \tag{4.31}$$

ou ainda

$$-1 \leq \frac{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\|} \leqslant 1 \tag{4.32}$$

Definição 133. Ângulo entre dois vetores

Chama-se *ângulo entre dois vetores* não nulos de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, ao menor ângulo θ formado por estes dois vetores, dado por

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\|} \qquad \text{com } 0 \leq \theta \leq \pi \tag{4.33}$$

Se no espaço euclidiano o produto interno $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2$ de dois vetores não nulos for

1. Nulo, então o ângulo por eles formado é de $\frac{\pi}{2}$ isto é, esses dois vetores são ortogonais (perpendiculares)
2. Positivo, então o ângulo por eles formado está compreendido entre $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$
3. Negativo, então o ângulo por eles formado está compreendido entre $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$

Exemplo 115.

- Os vetores $\mathbf{v}_1 = (1,1,1)$ e $\mathbf{v}_2 = (-2,2,0)$ são ortogonais, pois
  $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 = (1,1,1)(-2,2,0) = -2+2+0 = 0$
- O ângulo entre os vetores $\mathbf{v}_1 = (0,1,1)$ e $\mathbf{v}_2 = (-2,2,0)$ é dado por
  $\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1\|\|\mathbf{v}_2\|}\right) = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{8}}\right) = \arccos\left(\frac{2}{8}\right) \simeq 14^{\circ}$

4.5.5. Ortogonalidade e ortonormalidade

Definição 134. Vetor unitário

Seja V um espaço vetorial normado. Chama-se *vetor unitário* ao vetor cuja norma (comprimento) é igual à unidade.

Definição 135. Versor

Seja V um espaço vetorial normado. Chama-se *versor de um vetor* $\mathbf{v}$ *não nulo* ao vetor $\mathbf{e}_\mathbf{v}$, cujo comprimento é igual a um e possui a mesma direção e sentido de $\mathbf{v}$.

$$\text{vers}\,(\mathbf{v}) = \mathbf{e}_\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \tag{4.34}$$

Exemplo 116.

- O versor do vetor $\mathbf{v} = (1,2)$ é $\mathbf{e}_\mathbf{v} = \frac{(1,2)}{\|(1,2)\|} = \frac{(1,2)}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{e}_2$
  pelo que o vetor $\mathbf{v}$ se pode exprimir como função do versor $\mathbf{e}_\mathbf{v}$ como sendo $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 = \sqrt{5}\mathbf{e}_\mathbf{v}$
- O versor do vetor $\mathbf{v} = (1,2,3)$ é $\mathbf{e}_\mathbf{v} = \frac{(1,2,3)}{\|(1,2,3)\|} = \frac{(1,2,3)}{\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{e}_2 + \frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{e}_3$
  pelo que o vetor $\mathbf{v}$ se pode exprimir como função do versor $\mathbf{e}_\mathbf{v}$ como sendo $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 = \sqrt{14}\mathbf{e}_\mathbf{v}$

Definição 136. Conjuntos ortogonais

Seja o espaço linear V uma álgebra linear sobre o corpo $\mathbb{K}$ e V_1 um seu subespaço. Diz-se que V_1 é um *conjunto ortogonal* se for nulo o produto interno de todos os pares de vetores distintos de V_1. Neste contexto, diz-se que os elementos de V_1 são vetores ortogonais.

Exemplo 117.

O conjunto de vetores $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 : \mathbf{v}_1 = (1,1,1), \mathbf{v}_2 = (-2,2,0), \mathbf{v}_3 = (1,1,-2)\}$ é ortogonal, pois

(continuação)

$$\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 = (1,1,1)\,(-2,2,0) = -2+2+0 = 0$$
$$\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3 = (1,1,1)\,(1,1,-2) = 1+1-2 = 0$$
$$\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3 = (-2,2,0)\,(1,1,-2) = -2+2+0 = 0$$

Definição 137. Conjunto ortonormado

Chama-se *conjunto ortonormado* ao conjunto $V_1 \subseteq V$, constituído por vetores unitários ortogonais (constituído por versores).

Definição 138. Bases ortonormada

Seja $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ uma base ortogonal do espaço vetorial V de dimensão finita e com produto interno. $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ é uma base ortonormal de V se

$$\mathbf{u}_i = \left(\frac{1}{\|\mathbf{v}_i\|}\right)\mathbf{v}_i \tag{4.35}$$

Teorema 19. *Todo o conjunto de vetores não nulos e ortogonais é linearmente independente.*

Corolário: Todo o conjunto de vetores não nulos e ortogonais de um espaço vetorial com produto interno define uma base do subespaço vetorial por eles gerado.

Teorema 20. *Seja $V_1 = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ uma* base ortogonal *de um espaço vetorial V com produto interno definido. As coordenadas de um qualquer vetor $\mathbf{u} \in V$ na base V_1 são dadas por*

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} k_i\mathbf{v}_i \text{ , com } k_i = \frac{\mathbf{v}_i.\mathbf{u}}{\mathbf{v}_i.\mathbf{v}_i} \tag{4.36}$$

Corolário: Seja $V_1 = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ uma base ortonormada de um espaço vetorial V normado com produto interno definido. As coordenadas de um qualquer vetor $\mathbf{u} \in V$ na base V_1 são dadas por

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} k_i\mathbf{v}_i \text{ , com } k_i = \mathbf{v}_i.\mathbf{u} \tag{4.37}$$

4.5.6. Projeções

Definição 139. Projeção ortogonal de um vetor $\mathbf{u}$ sobre um vetor não nulo $\mathbf{v}$

Seja $\mathbf{u}$ um vetor que pode ser decomposto na soma de dois vetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$, perpendiculares entre si, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$. Admitindo que $\mathbf{u}_1$ tem a direção de um vetor $\mathbf{v}$, não nulo, ter-se-á $\mathbf{u}_2$ perpendicular (ortogonal) a $\mathbf{v}$. Neste contexto, chama-se *projeção ortogonal do vetor $\mathbf{u}$ sobre um vetor não nulo $\mathbf{v}$* ao vetor $\mathbf{u}_1$ dado por

$$\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v} \tag{4.38}$$

Definição 140. Componente ortogonal de um vetor $\mathbf{u}$ sobre um vetor não nulo $\mathbf{v}$

Chama-se *componente ortogonal (ou componente perpendicular) do vetor* $\mathbf{u}$ *sobre um vetor não nulo* $\mathbf{v}$ ao vetor $\mathbf{u}_2$ dado por

$$\text{perp}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v} \tag{4.39}$$

Definição 141. Projeção em subespaço definido por base ortogonal

Seja V um espaço vetorial com produto interno definido. Seja $V_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ um subespaço formado por vetores de $\mathbb{R}^n$ ortogonais não nulos. A *projeção ortogonal de um vetor* $\mathbf{u} \in V$ *sobre o subespaço* V_1 é dada por

$$\text{proj}_{V_1}\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{m} k_i\mathbf{v}_i \text{ , com } k_i = \frac{\mathbf{v}_i.\mathbf{u}}{\|\mathbf{v}_i\|^2} \tag{4.40}$$

pelo que a *projeção ortogonal de um vetor* $\mathbf{u}$ *ao longo da direção de um vetor* $\mathbf{v}_1$ (ou componente de $\mathbf{u}$ ao longo da direção de $\mathbf{v}_1$) é dada por

$$\text{proj}_{\mathbf{v}_1}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 \tag{4.41}$$

O processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

O processo de ortogonalização de Gram-Schmidt permite oter uma base ortonormal $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ a partir de uma base $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ e consiste em

1. Construir de uma base ortogonal $W = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \cdots, \mathbf{w}_n\}$, a partir de uma base $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{w}_2 &= \mathbf{v}_2 - \text{proj}_{\mathbf{w}_1}\mathbf{v}_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{w}_n &= \mathbf{v}_n - \text{proj}_{\mathbf{w}_1}\mathbf{v}_n - \text{proj}_{\mathbf{w}_2}\mathbf{v}_n - \cdots - -\text{proj}_{\mathbf{w}_{n-1}}\mathbf{v}_n \end{aligned} \tag{4.42}$$

2. Construir de uma base ortonormal $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$, a partir da base ortogonal $W = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \cdots, \mathbf{w}_n\}$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \left(\frac{1}{\|\mathbf{w}_1\|}\right)\mathbf{w}_1 \\ \mathbf{u}_2 &= \left(\frac{1}{\|\mathbf{w}_2\|}\right)\mathbf{w}_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{u}_n &= \left(\frac{1}{\|\mathbf{w}_n\|}\right)\mathbf{w}_n \end{aligned} \tag{4.43}$$

Definição 142. Orientação de um espaço vetorial

Sendo $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ e $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ duas bases de um espaço vetorial de dimensão finita, existe uma e uma só matriz $\mathbf{M}_{U \to V}$, regular e de ordem n, que é matriz de mudança da base U para a base V.

4.6. Transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$

Definição 143. Transformação linear

Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$, de dimensões $\dim(U) = m$ e $\dim(V) = n$, respetivamente, com m e n finitos. Diz-se que T *é uma transformação linear de* U *em* V ou *uma aplicação linear de* U *em* V se, e só se, $T : U \to V$ é uma função e forem satisfeitos os seguintes axiomas de linearidade

1. $\forall \mathbf{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U : T(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = T(\mathbf{u}_1) + T(\mathbf{u}_2)$
2. $\forall \mathbf{u}_1 \in U, \forall k \in \mathbb{R} : T(k\mathbf{u}_1) = kT(\mathbf{u}_1)$

Uma transformação linear T de U em V verifica as seguintes propriedades

Tabela 4.6.: Propriedades de uma transformação linear T *de* U *em* V.

	Propriedade
P1	A imagem (transformado) do vetor nulo do espaço U é o vetor nulo do espaço V, isto é, $T(\mathbf{o}_U) = \mathbf{o}_V$
P2	A imagem (transformado) do oposto de um vetor é o oposto da imagem desse vetor, isto é, $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$
P3	$\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n \in V, \forall k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbb{R} : T\left(\sum_{i=1}^{n} (k_i \mathbf{v}_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} k_i T(\mathbf{v}_i)$
P4	$\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V : T(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_1) - T(\mathbf{v}_2)$
P5	Uma aplicação não é transformação linear se a sua imagem (contradomínio) não é um espaço vetorial
P6	Se U_1 é um subespaço de U, então $T(U_1)$ é um subespaço de V

Exemplo 118.
A transformação $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ é linear

1. $\forall \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\in\mathbb{R}^2:\quad T(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)=T(\mathbf{u}_1)+T(\mathbf{u}_2)$?

$$T(\mathbf{u}_2)=\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -x_2 \\ 2x_2+3y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}_1)+T(\mathbf{u}_2)&=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2\\ &=\begin{bmatrix} -x_1 \\ 2x_1+3y_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -x_2 \\ 2x_2+3y_2 \end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix} -(x_1+x_2) \\ 2(x_1+x_2)+3(y_1+y_2) \end{bmatrix}=T(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)\end{aligned}$$

2. $\forall \mathbf{u}_1\in\mathbb{R}^2,\forall k\in\mathbb{R}: kT(\mathbf{u}_1)\quad =T(k\mathbf{u}_1)$?

$$\begin{aligned} kT(\mathbf{u}_1)\quad &=kT\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\\ &=k\begin{bmatrix} -x_1 \\ 2x_1+3y_1 \end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix} -kx_1 \\ 2kx_1+3ky_1 \end{bmatrix}=T(k\mathbf{u}_1)\end{aligned}$$

Verificadas as condições 1 e 2, pode afirmar-se que T é uma transformação linear.

Exemplo 119.
A transformação $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y)=((x+y+2),y,0)$ não é linear, pois

1. $\forall \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\in\mathbb{R}^2: T(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)=T(\mathbf{u}_1)+T(\mathbf{u}_2)$?

$$\mathbf{u}_1\in\mathbb{R}^2\Rightarrow\mathbf{u}_1=(x_1,y_1)\quad;\quad T(\mathbf{u}_1)=\mathbf{v}_1=((x_1+y_1+2),y_1,0)$$

$$\mathbf{u}_2\in\mathbb{R}^2\Rightarrow\mathbf{u}_2=(x_2,y_2)\quad;\quad T(\mathbf{u}_2)=\mathbf{v}_2=((x_2+y_2+2),y_2,0)$$

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}_1)+T(\mathbf{u}_2)&=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2\\ &=((x_1+y_1)+(x_2+y_2)+4,\ y_1+y_2,\ 0)\\ &\neq((x_1+x_2)+(y_1+y_2)+4,\ y_1+y_2,\ 0)\end{aligned}$$

Como falha esta condição, pode afirmar-se que T não é uma transformação linear.

Exemplo 120.
A transformação $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y) = ((x+y), y, 0)$ é linear, pois

1. $\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^2 : T(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = T(\mathbf{u}_1) + T(\mathbf{u}_2)$?

$$\mathbf{u}_1 \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbf{u}_1 = (x_1, y_1) \quad ; \quad T(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1 = ((x_1 + y_1), y_1, 0)$$

$$\mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbf{u}_2 = (x_2, y_2) \quad ; \quad T(\mathbf{u}_2) = \mathbf{v}_2 = ((x_2 + y_2), y_2, 0)$$

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}_1) + T(\mathbf{u}_2) &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \\ &= ((x_1 + y_1) + (x_2 + y_2),\ y_1 + y_2,\ 0) \\ &= ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2),\ y_1 + y_2,\ 0) \\ &= T(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2) \\ &= T(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \end{aligned}$$

2. $\forall \mathbf{u}_1 \in \mathbb{R}^2, \forall k \in \mathbb{R} : kT(\mathbf{u}_1) = T(k\mathbf{u}_1)$?

$$\begin{aligned} kT(\mathbf{u}_1) &= kT(x_1, y_1) \\ &= k((x_1 + y_1), y_1, 0) \\ &= (kx_1 + ky_1, ky_1, 0) \\ &= T(kx_1, ky_1) \end{aligned}$$

Verificadas as condições 1 e 2, pode afirmar-se que T é uma transformação linear.

4.6.1. Classificação das transformações lineares

Definição 144. Função injetiva
Uma transformação (ou função) T de U em V diz-se *injetiva* se, e só se, a elementos diferentes de U correspondem imagens diferentes em V, isto é, se

$$\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in A, \mathbf{u}_1 \neq \mathbf{u}_2 \Rightarrow T(\mathbf{u}_1) \neq T(\mathbf{u}_2) \tag{4.44}$$

Exemplo 121.

- A transformação $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y) = (x, y, x+y)$ é injetiva.
- A transformação $T:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = x^2$ não é injetiva.

Definição 145. Função sobrejetiva
Uma transformação T de U em V diz-se *sobrejetiva* se, e só se, a imagem da transformação coincidir com o conjunto V, isto é, se $T(U) = V$

Exemplo 122.
A transformação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x, y)$ é sobrejetiva.

Definição 146. Função bijetiva
Uma função diz-se *bijetiva* se, e só se, é injetiva e sobrejetiva.

Definição 147. Homomorfismo, isomorfismo, endomorfismo e automorfismo
Se T uma transformação linear de U em V, diz-se que

- T é um homomorfismo de U em V.
- T é um isomorfismo de U em V se T é bijetiva.
- T é um endomorfismo de U em V (ou operador linear de V) se $U = V$.
- T é um automorfismo de U em V (ou é invertível em U) se é um endomorfismo bijetivo.

Teorema 21. *Se T é um isomorfismo de U em V e V é um espaço linear n-dimensional sobre um corpo $\mathbb{K}$, então V e $\mathbb{K}^n$ são isomorfos.*

Teorema 22. *Se T é um homomorfismo de U em V, então os dois espaços vetoriais de dimensão finita sobre um mesmo corpo são isomorfos se, e só se, têm a mesma dimensão.*

4.6.2. Imagem e núcleo de uma transformação linear

Definição 148. Imagem de uma transformação linear
Sejam U e V dois espaços lineares sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$ e T uma transformação de U em V. Chama-se *imagem (ou espaço imagem) de uma transformação linear*, e representa-se por $\mathrm{Im}(T)$, ao conjunto dos vetores de V que são imagens dos vetores de U, isto é

$$\mathrm{Im}(T) = T(\mathbf{U}) = \{\mathbf{v}_i \in V : \exists \mathbf{u}_i \in U, \quad T(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i\} \tag{4.45}$$

A imagem da transformação linear $T : U \to V$ é um subespaço linear de V.

Definição 149. Característica de uma transformação linear

Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Chama-se característica de uma transformação linear, e representa-se por $\mathrm{car}(T)$, à dimensão da imagem de T.

Definição 150. Núcleo de uma transformação linear

Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Chama-se *núcleo de uma transformação linear (Kernel ou espaço nulo)*, e representa-se por $\mathrm{N}(T)$, ao conjunto dos vetores de U cuja imagem por T é o vetor nulo

$$\mathrm{N}(T) = \{\mathbf{u}_i \in U : \quad T(\mathbf{u}_i) = \mathbf{o}\} \tag{4.46}$$

Se $T : U \to V$ é uma transformação linear, então o seu núcleo verifica as seguintes propriedades

Tabela 4.7.: Propriedades de uma transformação linear T de U em V.

	Propriedade
P1	O núcleo de T é um subespaço linear de U
P2	O conjunto $\mathrm{N}(T)$ contém sempre, pelo menos, o vetor nulo de U
P3	Para determinar o núcleo de T devem procurar-se as soluções do sistema de equações lineares homogéneas $T(\mathbf{u}) = \mathbf{o}$

Definição 151. Nulidade de uma transformação linear

Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Chama-se *nulidade de uma transformação linear*, $\mathrm{nul}(T)$, à dimensão do núcleo de T.

Teorema 23. *Seja* $T : U \to V$ uma transformação linear, *e* U *um espaço de dimensão finita, então* $\dim(U) = \dim(\mathrm{Im}(T)) + \dim(\mathrm{N}(T)) = \mathrm{car}(T) + \mathrm{nul}(T)$

Exemplo 123.

Na transformação linear identidade $T : U \to U$ definida por $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$

- A imagem da transformação linear é o próprio U, $\mathrm{Im}(T) = U$
- O núcleo da transformação linear é o espaço linear reduzido ao vetor nulo $\mathbf{o}$, $\mathrm{N}(T) = \{\mathbf{o}\}$.

Na transformação linear $T : U \to V$ definida por $T(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$

- A imagem da transformação linear é o espaço linear reduzido ao vetor nulo, $\mathrm{Im}(T) = \{\mathbf{o}\}$.
- O núcleo da transformação linear é o próprio U, $\mathrm{N}(T) = U$.

4.6.3. Representação matricial de uma transformação linear

Sejam as bases $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_m\}$ do espaço linear $\mathbb{R}^m$ e $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ do espaço linear $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{w_1}$ um vetor qualquer do espaço linear $\mathbb{R}^m$ e $\mathbf{w_2}$ um vetor qualquer do espaço linear $\mathbb{R}^n$. Tal como exposto no capítulo anterior, as coordenadas de um vetor numa base correspondem aos coeficientes da combinação linear dos vetores que constituem essa base, pelo que se poderá escrever

$$\mathbf{w_1} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_m\mathbf{u}_m \tag{4.47}$$

e

$$\mathbf{w_2} = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_n\mathbf{v}_n \tag{4.48}$$

onde $a_1, a_2, \cdots, a_m$ são as coordenadas do vetor $\mathbf{w_1}$ na base U, e $b_1, b_2, \cdots, b_n$ são as coordenadas do vetor $\mathbf{w_2}$ na base V.

Considere-se, agora, a transformação linear

$$\begin{aligned} &T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \\ &T(\mathbf{w}_1) = T(a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_m\mathbf{u}_m) \end{aligned} \tag{4.49}$$

que, pela propriedade $\mathbf{P_3}$ das transformações lineares, pode ser reescrita através de

$$T(\mathbf{w_1}) \quad = a_1T(\mathbf{u}_1) + a_2T(\mathbf{u}_2) + a_3T(\mathbf{u}_3) + \cdots + a_mT(\mathbf{u}_m) \tag{4.50}$$

Como $T(\mathbf{w}_1) \in \mathbb{R}^n$, então

$$T(\mathbf{w_1}) = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_n\mathbf{v}_n \tag{4.51}$$

Por analogia com o apresentado em espaços vetoriais, ter-se-á para matriz associada a uma transformação linear de U em V

$$T(\mathbf{u}) = \mathbf{Mu} \tag{4.52}$$

onde a matriz $\mathbf{M}$ é obtida através do seguinte algoritmo

$$\left[\begin{array}{c|c} V & T(U) \end{array}\right] \underset{\substack{\text{operações} \\ \text{elementares} \\ \text{sobre linhas}}}{\sim} \left[\begin{array}{c|c} I & \mathbf{M} \end{array}\right] \tag{4.53}$$

A matriz associada a uma transformação linear verifica as seguintes propriedades

Tabela 4.8.: Propriedades da matriz associada a uma transformação linear.

	Propriedade
P1	Se a transformação T é um endomorfismo, então a matriz $\mathbf{A}$ é quadrada
P2	A transformação nula é caracterizada pela matriz nula
P3	A transformação identidade é caracterizada pela matriz identidade

Teorema 24. *Seja $T : U \to V$ uma transformação linear e $\dim(\mathbf{U}) = n$. A transformação linear fica completamente caracterizada pelo conhecimento das imagens dos vetores de uma base ordenada de* $\mathbf{U}$.

Exemplo 124.
Considere a transformação linear $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definida por $T(a,b,c)=(a-c,\,b+2c)$ e as bases $U=\{(1,1,1),(-1,0,1),(0,2,-1)\}$ do espaço linear $\mathbb{R}^3$ e $V=\{(1,2),(3,4)\}$ do espaço linear $\mathbb{R}^2$. Determine a matriz de transformação linear relativa às bases U e V.

$$\begin{cases} T(1,1,1) &= (0,3) = t_{11}(1,2)+t_{21}(3,4)\\ T(-1,0,1) &= (-2,2) = t_{12}(1,2)+t_{22}(3,4)\\ T(0,2,-1) &= (1,0) = t_{13}(1,2)+t_{23}(3,4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1eq.\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0\\ 2 & 4 & 3 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} t_{11}\\ t_{21} \end{cases}\\ 2eq\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -2\\ 2 & 4 & 2 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} t_{12}\\ t_{22} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & 0 & -2 & 1\\ 2 & 4 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right]\\ 3eq.\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1\\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} t_{13}\\ t_{23} \end{cases} \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & 0 & -2 & 1\\ 2 & 4 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right]_{L_2=L_2-2L_1} \sim \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & 0 & -2 & 1\\ 0 & -2 & 3 & 6 & -2 \end{array}\right]_{L_2=-\frac{1}{2}L_2} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -3 & 1 \end{array}\right]_{L_1=L_1-3L_2} \sim \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & \frac{9}{2} & 7 & -2\\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{M}=\left[\begin{array}{ccc} t_{11} & t_{12} & t_{13}\\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc} \frac{9}{2} & 7 & -2\\ -\frac{3}{2} & -7 & 1 \end{array}\right]$$

Outra hipótese é atender ao facto de $\mathbf{M}=[base\ V]^{-1}T(\mathbf{u})$

$$\begin{cases} T(1,1,1) &= c_{11}(1,2)+c_{21}(3,4)=(0,3)\\ T(-1,0,1) &= c_{12}(1,2)+c_{22}(3,4)=(-2,2)\\ T(0,2,-1) &= c_{13}(1,2)+c_{23}(3,4)=(1,0) \end{cases} \Rightarrow T(\mathbf{u})=\left[\begin{array}{ccc} 0 & -2 & 1\\ 3 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0\\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]_{L_2=L_2-2L_1} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right]_{L_2=-\frac{1}{2}L_2} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]_{L_1=L_1-3L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$[base\ V]^{-1}=\left[\begin{array}{cc} -2 & \frac{3}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\mathbf{M}=\left[\begin{array}{cc} -2 & \frac{3}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc} 0 & -2 & 1\\ 3 & 2 & 0 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc} \frac{9}{2} & 7 & -2\\ -\frac{3}{2} & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{w_1} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_m\mathbf{u}_m \tag{4.47}$$

e

$$\mathbf{w_2} = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_n\mathbf{v}_n \tag{4.48}$$

onde $a_1, a_2, \cdots, a_m$ são as coordenadas do vetor $\mathbf{w_1}$ na base U, e $b_1, b_2, \cdots, b_n$ são as coordenadas do vetor $\mathbf{w_2}$ na base V.

Considere-se, agora, a transformação linear

$$\begin{aligned} &T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \\ &T(\mathbf{w}_1) = T(a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_m\mathbf{u}_m) \end{aligned} \tag{4.49}$$

que, pela propriedade $\mathbf{P_3}$ das transformações lineares, pode ser reescrita através de

$$T(\mathbf{w}_1) \quad = a_1T(\mathbf{u}_1) + a_2T(\mathbf{u}_2) + a_3T(\mathbf{u}_3) + \cdots + a_mT(\mathbf{u}_m) \tag{4.50}$$

Como $T(\mathbf{w}_1) \in \mathbb{R}^n$, então

$$T(\mathbf{w_1}) = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_n\mathbf{v}_n \tag{4.51}$$

Por analogia com o apresentado em espaços vetoriais, ter-se-á para matriz associada a uma transformação linear de U em V

$$T(\mathbf{u}) = \mathbf{Mu} \tag{4.52}$$

onde a matriz $\mathbf{M}$ é obtida através do seguinte algoritmo

$$\left[\begin{array}{c|c} V & T(U) \end{array}\right] \underset{\substack{\text{operações} \\ \text{elementares} \\ \text{sobre linhas}}}{\sim} \left[\begin{array}{c|c} I & \mathbf{M} \end{array}\right] \tag{4.53}$$

A matriz associada a uma transformação linear verifica as seguintes propriedades

Tabela 4.8.: Propriedades da matriz associada a uma transformação linear.

	Propriedade
P1	Se a transformação T é um endomorfismo, então a matriz $\mathbf{A}$ é quadrada
P2	A transformação nula é caracterizada pela matriz nula
P3	A transformação identidade é caracterizada pela matriz identidade

Teorema 24. *Seja $T : U \to V$ uma transformação linear e $\dim(\mathbf{U}) = n$. A transformação linear fica completamente caracterizada pelo conhecimento das imagens dos vetores de uma base ordenada de $\mathbf{U}$.*

Exemplo 124.
Considere a transformação linear $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definida por $T(a,b,c)=(a-c,\,b+2c)$ e as bases $U=\{(1,1,1),(-1,0,1),(0,2,-1)\}$ do espaço linear $\mathbb{R}^3$ e $V=\{(1,2),(3,4)\}$ do espaço linear $\mathbb{R}^2$. Determine a matriz de transformação linear relativa às bases U e V.

$$\begin{cases} T(1,1,1) &= (0,3) = t_{11}(1,2)+t_{21}(3,4)\\ T(-1,0,1) &= (-2,2) = t_{12}(1,2)+t_{22}(3,4)\\ T(0,2,-1) &= (1,0) = t_{13}(1,2)+t_{23}(3,4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1eq. \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0\\ 2 & 4 & 3 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} t_{11}\\ t_{21} \end{cases}\\ 2eq \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -2\\ 2 & 4 & 2 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} t_{12}\\ t_{22} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & 1\\ 2 & 4 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right]\\ 3eq. \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1\\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} t_{13}\\ t_{23} \end{cases} \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & 1\\ 2 & 4 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right]_{L_2=L_2-2L_1} \sim \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & 1\\ 0 & -2 & 3 & 6 & -2 \end{array}\right]_{L_2=-\frac{1}{2}L_2} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -3 & 1 \end{array}\right]_{L_1=L_1-3L_2} \sim \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & \frac{9}{2} & 7 & -2\\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{M} = \left[\begin{array}{ccc} t_{11} & t_{12} & t_{13}\\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} \frac{9}{2} & 7 & -2\\ -\frac{3}{2} & -7 & 1 \end{array}\right]$$

Outra hipótese é atender ao facto de $\mathbf{M}=[base\ V]^{-1}\,T(\mathbf{u})$

$$\begin{cases} T(1,1,1) &= c_{11}(1,2)+c_{21}(3,4) = (0,3)\\ T(-1,0,1) &= c_{12}(1,2)+c_{22}(3,4) = (-2,2)\\ T(0,2,-1) &= c_{13}(1,2)+c_{23}(3,4) = (1,0) \end{cases} \Rightarrow T(\mathbf{u}) = \left[\begin{array}{ccc} 0 & -2 & 1\\ 3 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0\\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]_{L_2=L_2-2L_1} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right]_{L_2=-\frac{1}{2}L_2} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]_{L_1=L_1-3L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$[base\ V]^{-1} = \left[\begin{array}{cc} -2 & \frac{3}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\mathbf{M} = \left[\begin{array}{cc} -2 & \frac{3}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc} 0 & -2 & 1\\ 3 & 2 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} \frac{9}{2} & 7 & -2\\ -\frac{3}{2} & -3 & 1 \end{array}\right]$$

Exemplo 125.
Dada a matriz $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ associada à transformação linear e relativa às bases canónicas

- Como $\mathbf{M}$ é de tipo 2×3, a transformação linear é $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.
- A lei da transformação linear é dada por

  $\mathbf{v} = T(\mathbf{u}) = \mathbf{Mu}$

  $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2b+3c \\ 3a+2b+c \end{bmatrix}$$

  então $T \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2b+3c \\ 3a+2b+c \end{bmatrix}$

  ou $T(a,b,c) = (a+2b+3c, 3a+2b+c)$.
- O núcleo e a imagem da transformação linear são

  $$\mathrm{N}(T) \Rightarrow T \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a+2b+3c \\ 3a+2b+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  $$\begin{cases} a+2b+3c=0 \\ 3a+2b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=-2c \\ c=c \end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{N}(T) = \begin{bmatrix} c & -2c & c \end{bmatrix}$$

  ou $\mathrm{N}(T) = \{(c,-2c,c),\ c \in \mathbb{R}\}$

  pelo que o núcleo da transformação linear é um subespaço de $\mathbb{R}^3$, com $\mathrm{nul}(T) = 1$.

  Logo, $\mathrm{car}(T) = \dim(\mathbb{R}^3) - \mathrm{nul}(T) = 2$, pelo que a imagem da transformação linear é o próprio $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$.

Exemplo 126.
Considere a transformação linear $T : U \to V$ definida por $T(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$ e determine a imagem e o núcleo da transformação linear.

- A imagem da transformação linear é o espaço linear reduzido ao vetor nulo, $\mathrm{Im}(T) = \{\mathbf{o}\}$.
- O núcleo da transformação linear é o próprio U, $\mathrm{N}(T) = U$.

4.6.4. Álgebra de uma matriz associada a uma transformação linear

Sejam $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear, $\mathbf{U}$ uma base de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbf{V}$ uma base de $\mathbb{R}^n$. A matriz associada à transformação linear é caracterizada por ter um número de linhas igual à $\dim(\mathbf{V})$ e um número de colunas igual à $\dim(\mathbf{U})$ e por ter cada coluna constituída por elementos que são, ordenadamente de cima para baixo, as componentes na base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$ da imagem do vetor da base $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_m$ com o mesmo índice da coluna em causa.

Definição 152. A soma de transformações lineares

A soma de transformações lineares é dada por

$$\begin{cases} T : \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R}^m \\ S : \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R}^m \end{cases} \Rightarrow \forall \mathbf{u} \in U \ : \ (T+S)(\mathbf{u}) = T(\mathbf{u}) + S(\mathbf{u}) \tag{4.54}$$

cuja representação matricial é

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_T + \mathbf{M}_S \tag{4.55}$$

Definição 153. O produto de um escalar por uma transformação linear

O produto de um escalar por uma transformação linear é dado por

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \forall \mathbf{u} \in U, \forall k \in \mathbb{K} : (kT)(\mathbf{u}) = k(T(\mathbf{u})) \tag{4.56}$$

cuja representação matricial é:

$$\mathbf{M} = k\mathbf{M}_T \tag{4.57}$$

Definição 154. O produto (composição ou composta) das transformações lineares

Considerem-se os espaços lineares U, V, W sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$ e $T : U \to V$ e $S : V \to W$ duas transformações (funções) lineares aplicadas a esses espaços. A função composta $(S \circ T)(\mathbf{u}) = S(T(\mathbf{u}))$ é uma transformação linear se o domínio de S coincide com a imagem de T, isto é

$$\begin{cases} T : & U \to V \\ S : & V \to W \end{cases} \Rightarrow (SoT) : U \to W \tag{4.58}$$

Se a transformação linear for uma composição de duas funções, então

$$\mathbf{M}_{SoT} = \mathbf{M}_S \times \mathbf{M}_T \tag{4.59}$$

4.6.5. Valores e vetores próprios de uma transformação linear

Definição 155. Valor e vetor próprio de uma matriz de transformação linear

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ um endomorfismo de $\mathbb{V}$ Um vetor não nulo $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ diz-se *vetor próprio de T associado ao valor próprio* $\lambda \in \mathbb{K}$ (escalar real ou complexo) se, e só se

$$T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v} \tag{4.60}$$

Esta igualdade 4.60 pode ser representada pela igualdade

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \tag{4.61}$$

ou, ainda, considerando $\mathbf{I}$ a matriz identidade, pelo sistema homogéneo

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\,\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{4.62}$$

Sendo este sistema um sistema homogéneo, é sempre possível a sua resolução. Contudo, como o vetor próprio é, por definição, um vetor não nulo, ter-se-á que impor a indeterminação deste sistema através de

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \tag{4.63}$$

ou seja

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \tag{4.64}$$

Definição 156. Polinómio característico

Chama-se *polinómio característico* da matriz $\mathbf{A}$ ao polinómio $\mathcal{P}(\mathbf{A}) = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}|$, onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade.

Definição 157. Equação característica

Chama-se *equação característica* à equação $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$.

Definição 158. Valor próprio

Chama-se *valor próprio* da matriz $\mathbf{A}$ a cada escalar λ para o qual existe um vetor $\mathbf{v}$ não nulo tal que $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$.

Definição 159. Subespaço próprio

Chama-se *vetor próprio* da matriz $\mathbf{A}$ associado ao valor próprio λ, ao vetor não nulo $\mathbf{v}$ para o qual existe um escalar λ tal que $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$, isto é, para cada valor próprio λ, os vetores próprios associados são as soluções do sistema homogéneo $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Os vetores próprios associados a um mesmo valor próprio λ constituem um subespaço de $\mathbb{E}_\lambda = \{\mathbf{v} \in \mathbb{V}\colon (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\,\mathbf{v} = 0\}$, designado por *subespaço próprio associado a* λ. A dimensão deste subespaço corresponde ao grau de indeterminação do sistema homogéneo $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$ e uma base deste subespaço é um conjunto de vetores próprios.

Cada *valor próprio*, λ, é solução da equação 4.64 e para cada valor próprio os correspondentes *vetores próprios*, $\mathbf{v}$, são solução do sistema homogéneo associado $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Os valores próprios de uma matriz quadrada $\mathbf{A}$ associada a uma transformação linear verificam as seguintes propriedades

Tabela 4.9.: Propriedades dos valores próprios de uma matriz quadrada $\mathbf{A}$ associada a uma transformação linear.

	Propriedade
P1	A soma dos valores próprios de $\mathbf{A}$ é igual ao traço de $\mathbf{A}$.
P2	O produto dos valores próprios de $\mathbf{A}$ é igual ao valor do determinante de $\mathbf{A}$.

Exemplo 127.

Para verificar que $\lambda = 2$ é valor próprio da matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}$, basta verificar que $\lambda = 2$ é solução da equação característica

$$|\mathbf{A} - 2\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-2 & 2 & 3 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 0 & -4 & 3-2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Analogamente, $\lambda = -1$ não é valor próprio de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}$, se não for solução da equação característica

$$|\mathbf{A} - (-1)\mathbf{I}| = |\mathbf{A} + \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1+1 & 2 & 3 \\ 0 & 2+1 & 0 \\ 0 & -4 & 3+1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2\,(-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 24$$

Como $|\mathbf{A} - 2\mathbf{I}| = 0$ e $|\mathbf{A} + \mathbf{I}| = 24 \neq 0$, conclui-se que $\lambda = 2$ é valor próprio da matriz e $\lambda = -1$ não é valor próprio da matriz.

Exemplo 128.

Para calcular os valores e os vetores próprios da matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ é necessário calcular o polinómio característico, resolver a equação característica para obter os valores próprios e, para cada valor próprio, resolver o sistema homogéneo associado para obter os respetivos vetores próprios.

Assim, a matriz $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ é

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

que possui o polinómio característico

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - 8$$

e cuja equação característica é

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 0$$

A resolução desta equação determina os valores próprios da matriz

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5 \vee \lambda = -1$$

Cada um destes valores próprios determina o cálculo de um subespaço próprio. Assim, para o valor próprio $\lambda = 5$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{u} = \mathbf{o} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow_{\lambda=5} \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -4 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right]_{L_1 = -\frac{1}{4}L_1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right]_{L_2 = L_2 - 2L_1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = u_2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Para o valor próprio $\lambda = -1$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{u} = \mathbf{o} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow_{\lambda=-1} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right]_{\substack{L_2 = L_2 - L_1 \\ L_1 = \frac{1}{2}L_1}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2u_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -2u_2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Os vetores próprios associados a $\lambda = 5$ e a $\lambda = -1$ são bases dos subespaços próprios representados pelos conjuntos $E_5 = \{(u_1, u_1), u_1 \in \mathbb{R}\}$ e $E_{-1} = \{(-2u_2, u_2), u_2 \in \mathbb{R}\}$, respetivamente.

Determinação da equação característica de uma matriz

Teorema 25. *(Teorema Fundamental da Álgebra) Todo o polinómio $\mathcal{P}(\lambda)$ de grau n com coeficientes reais tem exatamente n raízes, incluindo multiplicidade e raízes complexas.*

Teorema 26. *(de Cayley-Hamilton) Toda a matriz quadrada satisfaz a sua própria equação característica.*

Exemplo 129.
Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 9 & 16 \\ 8 & 17 \end{bmatrix}$ e a equação característica $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - 4\lambda - 5$.

Substituindo λ por $\mathbf{A}$, tem-se

$$|\mathbf{A} - \mathbf{AI}| = \mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} - 5\mathbf{I}$$

pelo que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} - 5\mathbf{I} &= \begin{bmatrix} 9 & 16 \\ 8 & 17 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

verificando, assim, o Teorema de Cayley-Hamilton.

4.6.6. Matrizes semelhantes

Definição 160. Matrizes semelhantes

Duas matrizes quadradas de ordem n, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ dizem-se semelhantes se, e só se,

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} \tag{4.65}$$

onde $\mathbf{P}$ é uma matriz também quadrada de ordem n e invertível. Neste contexto, escreve-se $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Propriedade: duas matrizes semelhantes têm o mesmo determinante, a mesma característica, o mesmo polinómio característico e, por consequência, os mesmos valores próprios. Contudo não têm, geralmente, os mesmos vetores próprios.

Se $A = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ e $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ duas bases de um mesmo espaço linear de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{R}$, T um endomorfismo e $\mathbf{P}$ a matriz de mudança de base de U para V, então a matriz de $\mathbf{B}$ na nova base é dada por $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$.

Exemplo 130.
Para calcular uma matriz semelhante à matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, começa-se por considerar uma matriz regular da mesma ordem de $\mathbf{A}$, por exemplo, $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.

Sendo $\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, uma matriz semelhante a $\mathbf{A}$ é, por exemplo, $\mathbf{B}$ dada por

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 19 \\ -8 & 14 \end{bmatrix}$$

4.6.7. Diagonalização de uma matriz quadrada

Definição 161. Matriz diagonalizável

Uma matriz $\mathbf{A}$ diz-se diagonalizável se for semelhante a uma matriz diagonal, isto é, se existir uma matriz $\mathbf{P}$ também quadrada de ordem n e invertível e uma matriz diagonal $\mathbf{D}$ tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} \tag{4.66}$$

Propriedade

Prova-se que uma matriz $\mathbf{A}$, quadrada de ordem n, é diagonalizável se, e só se, possui n vetores próprios linearmente independentes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$, associados aos respetivos valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ com

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{4.67}$$

A diagonalização da matriz $\mathbf{A}$ quadrada de ordem n obtém-se facilmente através do algoritmo seguinte

1. Calcular os valores próprios da matriz $\mathbf{A}$ através da resolução da equação característica $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$
2. Para cada valor próprio encontrado, determinar os respetivos vetores próprios e formar uma base do subespaço próprio associado a esses vetores
3. Caso a soma das dimensões dos subespaços próprios seja igual a n, a matriz $\mathbf{A}$ é diagonalizável. Neste contexto, considera-se uma matriz $\mathbf{P}$ uma matriz cujas colunas são constituídas pelos n vetores próprios. A matriz $\mathbf{D}$ é, neste caso, uma matriz diagonal cujos elementos da sua diagonal principal são os valores próprios a que cada vetor próprio está, ordenadamente, associado.

4.7. Exercícios resolvidos

Exercício 36.

Mostre que o conjunto $\mathcal{P}$, dos polinómios de grau menor ou igual a n e de coeficientes reais, é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

Resolução.

- Verifica a seguinte axiomática de existência e unicidade da operação interna adição de polinómios de grau menor ou igual a n e de coeficientes reais, com as seguintes propriedades:

  $\mathbf{A}_1$ Determinação

  $$\forall \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathcal{P} : (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \in \mathcal{P}$$

  $\mathbf{A}_2$ Associatividade

  $$\forall \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \in \mathcal{P} : (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) + \mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_1 + (\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)$$

  $\mathbf{A}_3$ Comutatividade

  $$\forall \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathcal{P} : \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1$$

  $\mathbf{A}_4$ Existência de elemento neutro

  $$\exists^1 \mathbf{o} \in \mathcal{P}, \forall \mathbf{p}_1 \in \mathcal{P} : \mathbf{p}_1 + \mathbf{o} = \mathbf{o} + \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1$$

  $\mathbf{A}_5$ Existência de elemento oposto de $\mathbf{p}_1$

  $$\forall \mathbf{p}_1 \in \mathcal{P}, \exists^1 (-\mathbf{p}_1) \in \mathcal{P} : \mathbf{p}_1 + (-\mathbf{p}_1) = (-\mathbf{p}_1) + \mathbf{p}_1 = \mathbf{0}$$

- Verifica a seguinte axiomática de existência e unicidade da operação externa multiplicação de um escalar real por um polinómio de grau menor ou igual a n e de coeficientes reais, com as seguintes propriedades

  $\mathbf{M}_1$ Determinação

  $$\forall k_1 \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{p}_1 \in \mathcal{P} : (k_1 \mathbf{p}_1) \in \mathcal{P}$$

  $\mathbf{M}_2$ Associatividade mista

  $$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{p}_1 \in \mathcal{P} : (k_1 k_2)\, \mathbf{p}_1 = k_1\, (k_2 \mathbf{p}_1)$$

  $\mathbf{M}_3$ Distributividade da multiplicação de um escalar real em relação à adição de polinómios

  $$\forall k_1 \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathcal{P} : k_1\, (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = k_1 \mathbf{p}_1 + k_1 \mathbf{p}_2$$

  $\mathbf{M}_4$ Distributividade da multiplicação de polinómios em relação à adição de escalares reais

  $$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{p}_1 \in \mathcal{P} : (k_1 + k_2)\, \mathbf{p}_1 = k_1 \mathbf{p}_1 + k_2 \mathbf{p}_1$$

  $\mathbf{M}_5$ Existência de elemento neutro para a operação externa, o escalar 1

  $$\forall \mathbf{p}_1 \in \mathcal{P} : 1 \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1$$

Verificadas todas as propriedades, pode afirmar-se que o conjunto $\mathcal{P}$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

■

Exercício 37.

Mostre que o conjunto $M_{m\times n}$, das matrizes reais retangulares, é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

Resolução.

- Verifica a seguinte axiomática de existência e unicidade da operação interna adição de matrizes do tipo $m \times n$, com as seguintes propriedades:

  $\mathbf{A}_1$ Determinação

  $$\forall \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathcal{M}_{m\times n} : (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \in \mathcal{M}_{m\times n}$$

  $\mathbf{A}_2$ Associatividade

  $$\forall \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3 \in \mathcal{M}_{m\times n} : (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) + \mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_1 + (\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3)$$

  $\mathbf{A}_3$ Comutatividade

  $$\forall \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathcal{M}_{m\times n} : \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_1$$

  $\mathbf{A}_4$ Existência de elemento neutro, a matriz nula $\mathbf{O}$

  $$\exists^1 \mathbf{O} \in \mathcal{M}_{m\times n}, \forall \mathbf{A}_1 \in \mathcal{M}_{m\times n} : \mathbf{A}_1 + \mathbf{O} = \mathbf{O} + \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1$$

  $\mathbf{A}_5$ Existência de elemento oposto de $\mathbf{A}$, a matriz $(-\mathbf{A})$, $(-\mathbf{A})$ é a matriz simétrica de $\mathbf{A}$

  $$\forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}, \exists^1 (-\mathbf{A}_1) \in \mathcal{M}_{m\times n} : \mathbf{A}_1 + (-\mathbf{A}_1) = (-\mathbf{A}_1) + \mathbf{A}_1 = \mathbf{O}$$

- Verifica a seguinte axiomática de existência e unicidade da operação externa multiplicação de um escalar real por uma matriz, com as seguintes propriedades

  $\mathbf{M}_1$ Determinação

  $$\forall k_1 \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{A}_1 \in \mathcal{M}_{m\times n} : (k_1 \mathbf{A}_1) \in M_{m\times n}$$

  $\mathbf{M}_2$ Associatividade

  $$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{A}_1 \in \mathcal{M}_{m\times n} : (k_1 k_2)\, \mathbf{A}_1 = k_1\, (k_2 \mathbf{A}_1)$$

  $\mathbf{M}_3$ Distributividade da multiplicação de um escalar real em relação à adição de matrizes

  $$\forall k_1 \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathcal{M}_{m\times n} : k_1\, (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) = k_1 \mathbf{A}_1 + k_1 \mathbf{A}_2$$

  $\mathbf{M}_4$ Distributividade da multiplicação de matrizes em relação à adição de escalares reais

  $$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{A}_1 \in \mathcal{M}_{m\times n} : (k_1 + k_2)\, \mathbf{A}_1 = k_1 \mathbf{A}_1 + k_2 \mathbf{A}_1$$

  $\mathbf{M}_5$ Existência de elemento neutro da operação externa, o escalar 1

  $$\forall \mathbf{A}_1 \in \mathcal{M}_{m\times n} : 1\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1$$

Verificadas todas as propriedades, pode afirmar-se que o conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

■

Exercício 38.

Verificar se o conjunto $B = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b = a^2\}$ é um subespaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

Resolução.

Seja $\begin{cases} \mathbf{v}_1 = (a_1, b_1) = (a_1, a_1^2) \\ \mathbf{v}_2 = (a_2, b_2) = (a_2, a_2^2) \end{cases}$

Verificação do axioma para a soma de vetores

$\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in B, (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \in B$

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 & = ((a_1 + a_2), (b_1 + b_2)) \\ & = ((a_1 + a_2), (a_1^2 + a_2^2)) \neq \left((a_1 + a_2), (a_1 + a_2)^2\right) \end{cases}$$

Logo, como o axioma não é verificado, conclui-se que o conjunto $B = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b = a^2\}$ não é um subespaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

■

Exercício 39.

Verificar se o vetor $\mathbf{v}_3 = (8, 13, 9)$ é combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)$ e $\mathbf{v}_2 = (2, 3, 1)$.

Resolução.

Através da representação matricial da combinação linear de vetores, $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{v}_i$, tem-se

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 13 \\ 3 & 1 & 9 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 = L_2 - 2L_1 \\ L_3 = L_3 - 3L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -5 & -15 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - 5L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Como $\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 2$ e $GI = 0$, este sistema é possível e determinado, pelo que se determinam $k_1 = 2 \wedge k_2 = 3$. Logo, $\mathbf{v}_3$ é combinação linear de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, sendo $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2$.

■

Exercício 40.

Verifique se o vetor $\mathbf{v}_3 = (8, 13, 9)$ é combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)$ e $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 1)$.

Resolução.

Através da representação matricial da combinação linear de vetores, $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{v}_i$, tem-se

$$k_1 (1, 1, 0) + k_2 (0, 0, 1) = (8, 13, 9)$$

$$(k_1, k_1, 0) + (0, 0, k_2) = (8, 13, 9)$$

$$(k_1, k_1, k_2) = (8, 13, 9)$$

$$\begin{cases} k_1 &= 8 \\ k_1 &= 13 \\ k_2 &= 9 \end{cases}$$

Este sistema é impossível, pelo que $\mathbf{v}_3$ não é combinação linear de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

■

Exercício 41.

Verifique se a função real de variável real $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ é combinação linear das funções $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x$ e $f_3(x) = 1$.

Resolução.

Representando o polinómio $ax^2 + bx + c$ pelo vetor de coordenadas (a, b, c) com base na equação de combinação linear $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{v}_i$ tem-se

$$k_1 \mathbf{f}_1(x) + k_2 \mathbf{f}_2(x) + k_3 \mathbf{f}_3(x) = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \text{ isto é, } k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + k_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}$$

$$k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0) + k_3(0, 0, 1) = (3, -5, 2)$$

$$(k_1, 0, 0) + (0, k_2, 0) + (0, 0, k_3) = (3, -5, 2)$$

$$(k_1, k_2, k_3) = (3, -5, 2)$$

$$\begin{cases} k_1 &= 3 \\ k_2 &= -5 \\ k_3 &= 2 \end{cases}$$

pelo que $f(x) = 3x^2 - 5x + 2 = 3\mathbf{f}_1(x) - 5\mathbf{f}_2(x) + 2\mathbf{f}_3(x)$.

■

Exercício 42.

Verifique se os vetores $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 1, 0)$ e $\mathbf{v}_3 = (3, 1, -1)$ são geradores do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

Resolução.

Seja $\mathbf{v} = (a, b, c)$ um vetor qualquer do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. Através da representação matricial da combinação linear de vetores, $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{v}_i$, tem-se

$$(a, b, c) = k_1(1, 2, 1) + k_2(-1, 1, 0) + k_3(3, 1, -1)$$

A representação matricial deste sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

A resolução deste sistema de equações lineares, pelo método da condensação, é dada por

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & a \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & -1 & c \end{array}\right] \underset{\substack{L_2=L_2-2L_1 \\ L_3=L_3-L_1}}{} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & a \\ 0 & 3 & -5 & b-2a \\ 0 & 1 & -4 & c-a \end{array}\right]_{L_3 \leftrightarrow L_2} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & a \\ 0 & 1 & -4 & c-a \\ 0 & 3 & -5 & b-2a \end{array}\right]_{L_3=L_3-3L_2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & a \\ 0 & 1 & -4 & c-a \\ 0 & 0 & 7 & a+b-3c \end{array}\right]$$

Como $\operatorname{car}(\mathbf{A}) = \operatorname{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 3$ para qualquer valor de a, b e c e $GI = 0$, então existem k_1, k_2 e k_3 , logo este sistema é um sistema possível e determinado, pelo que os vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ são geradores do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

■

Exercício 43.

Verifique se os vetores $\mathbf{v}_1 = (a, b, c)$, $\mathbf{v}_2 = (0, b, c)$ e $\mathbf{v}_3 = (0, 0, c)$ são geradores de um subespaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e, em caso afirmativo, identifique-o.

Resolução.

Seja $\mathbf{v} = (x, y, z)$ um vetor qualquer do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. Através da representação matricial da combinação linear de vetores, $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{v}_i$, tem-se

$$k_1 (a, b, c) + k_2 (0, b, c) + k_3 (0, 0, c) = (x, y, z)$$

A representação matricial deste sistema é dada por

$$\left[\begin{array}{ccc} a & 0 & 0 \\ b & b & 0 \\ c & c & c \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right]$$

A resolução deste sistema de equações lineares, pelo método da condensação, é dada por

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 0 & x \\ b & b & 0 & y \\ c & c & c & z \end{array}\right] \underset{\substack{L_2=L_2-aL_1 \\ L_3=L_3-cL_1}}{} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 0 & x \\ 0 & b & 0 & y \\ 0 & c & c & z \end{array}\right]_{L_3 \leftrightarrow L_2} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 0 & x \\ 0 & c & c & z \\ 0 & b & 0 & y \end{array}\right]_{C_3 \leftrightarrow C_2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 0 & x \\ 0 & c & c & z \\ 0 & 0 & b & y \end{array}\right]$$

Como $\operatorname{car}(\mathbf{A}) = \operatorname{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 3$, para a, b e c não nulos, este sistema é sempre possível e determinado qualquer que seja o valor de x, y, z. Logo, para a, b e c não nulos, estes três vetores são geradores do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

■

Exercício 44.
Verificar se os vetores $\mathbf{v}_1 = (1,2,1)$ e $\mathbf{v}_2 = (1,0,1)$ são geradores do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$

Resolução.
Seja $\mathbf{v} = (a,b,c)$ um vetor qualquer do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. Através da representação matricial da combinação linear de vetores, $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{v}_i$, tem-se

$$(a,b,c) = k_1 (1,2,1) + k_2 (1,0,1)$$

A representação matricial deste sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

A resolução deste sistema de equações lineares, pelo método da condensação, é dada por

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 2 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{array}\right] \underset{\substack{L_2=L_2-2L_1 \\ L_3=L_3-L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & b-2a \\ 0 & 0 & c-a \end{array}\right]$$

Os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ só são geradores de um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ se este sistema for um sistema possível. Neste contexto, $\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 2$ sse $c - a = 0$, pelo que o subespaço gerado pelos vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ é $V_1 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = c\}$. Logo, os vetores $\mathbf{v}_1 = (1,2,1)$ e $\mathbf{v}_2 = (1,0,1)$ não são geradores do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

■

Exercício 45.
Identifique o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $\mathbf{v}_1 = (1,0,0,0)$ e $\mathbf{v}_2 = (2,1,3,4)$

Resolução.
Seja $\mathbf{v} = (a,b,c,d)$ um vetor do espaço vetorial $\mathbb{R}^4$. Através da representação matricial da combinação linear de vetores, $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{v}_i$, tem-se

$$(a,b,c,d) = k_1 (1,0,0,0) + k_2 (2,1,3,4)$$

A representação matricial deste sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

A resolução deste sistema de equações lineares, pelo método da condensação, é dada por

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 3 & c \\ 0 & 4 & d \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3=L_3-3L_2 \\ L_4=L_4-4L_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c-3b \\ 0 & 0 & d-4b \end{array}\right]$$

Os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ só são geradores de um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ se este sistema for um sistema possível. Neste contexto, $\operatorname{car}(\mathbf{A}) = \operatorname{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 2$ sse $(c-3b=0) \wedge (d-4b=0)$, pelo que o subespaço gerado pelos vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ é

$V_1 = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : (c-3b=0) \wedge (d-4b=0)\}$.

■

Exercício 46.

Sejam os vetores $\mathbf{v}_1 = (a,b,c)$, $\mathbf{v}_2 = (2,1,3)$ e $\mathbf{v}_3 = (1,-1,2)$. Determine $\mathbf{v}_1$ tal que

1. $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ sejam linearmente dependentes.
2. $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ sejam linearmente independentes.

Resolução.

1. Pela equação 4.7, ter-se-á:

   $$k_1(a,b,c) + k_2(2,1,3) + k_3(1,-1,2) = (0,0,0)$$

   A representação matricial deste sistema é dada por

   $$\left[\begin{array}{ccc} a & 2 & 1 \\ b & 1 & -1 \\ c & 3 & 2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right]$$

   A resolução deste sistema de equações lineares, pelo método da condensação, é dada por

   $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 0 \\ -1 & 1 & b & 0 \\ 2 & 3 & c & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ C_3 \leftrightarrow C_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 0 \\ -1 & 1 & b & 0 \\ 2 & 3 & c & 0 \end{array}\right] \sim$$

   $$\begin{array}{l} \\ L_2=L_2+L_1 \\ L_3=L_3-2L_1 \end{array}$$

   $$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 0 \\ 0 & 3 & (b+a) & 0 \\ 0 & -1 & (c-2a) & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 0 \\ 0 & -1 & (c-2a) & 0 \\ 0 & 3 & (b+a) & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3=L_3-+3L_1 \end{array} \sim$$

   $$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 0 \\ 0 & -1 & c-2a & 0 \\ 0 & 0 & -5a+b+3c & 0 \end{array}\right]$$

   Para que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ sejam linearmente dependentes, o sistema tem de ser possível e indeterminado.

   Logo, para que $\operatorname{car}(\mathbf{A}) = \operatorname{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 2$, a condição $-5a+b+3c=0$ terá de ser satisfeita. Assim, $\mathbf{v}_1 = (a, 5a-3c, c)$.

Por exemplo, para $a = 1$ e $c = 1$, ter-se-á $b = 2$, sendo $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$.

2. Para que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ sejam linearmente independentes, o sistema 4.7 tem de ser possível e determinado. Logo, para que $\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 3$, a condição $-5a + b + 3c \neq 0$. Assim, por exemplo, para $a = 1$ e $c = 1$, ter-se-á $b \neq 2$, sendo, por exemplo, $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$

■

Exercício 47.

Verifique se os vetores representados no conjunto de polinómios

$$V = \{p_1 = -2x + 1, p_2 = 3x^2 - 4x + 5, p_3 = x^2 - 2x + 2\} \subset \mathcal{P}_2$$

onde $\mathcal{P}_2$ representa o conjunto de polinómios reais de grau igual ou inferior a 2, são linearmente independentes.

Resolução.

Representando o polinómio $ax^2 + bx + c$ pelo vetor de coordenadas (a, b, c) e, com base na equação 4.7, ter-se-á

$$k_1 (0, -2, 1) + k_2 (3, -4, 5) + k_3 (1, -2, 2) = (0, 0, 0)$$

A representação matricial deste sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A resolução deste sistema de equações lineares, pelo método da condensação, é dada por

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right]_{L_3 \leftrightarrow L_1} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]_{L_2 = L_2 + 2L_1} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]_{L_3 = L_3 - \frac{1}{2} L_2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Como $\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 2$, o sistema é possível e indeterminado, os vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ são linearmente dependentes.

Com efeito, $-2x + 1 = -\left(3x^2 - 4x + 5\right) + 3\left(x^2 - 2x + 2\right)$

■

Exercício 48.

Verifique se os vetores $\mathbf{v}_1 = (-1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (0, -2, 1)$ e $\mathbf{v}_3 = (2, -1, 1)$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

Resolução.

Os vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ são formados por três elementos, logo são candidatos a formar uma base de $\mathbb{R}^3$

1. Os vetores $\mathbf{v}_1 = (1,2,3)$, $\mathbf{v}_2 = (0,-2,1)$ e $\mathbf{v}_3 = (2,-1,1)$ são geradores de um espaço vetorial de $\mathbb{R}^3$?

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{v}$$

$$k_1(1,2,3) + k_2(0,-2,1) + k_3(2,-1,1) = (a,b,c)$$

$$(k_1, 2k_1, 3k_1) + (0,-2k_2,k_2) + (2k_3,-k_3,k_3) = (a,b,c)$$

$$((k_1+2k_3), (2k_1-2k_2-k_3), (3k_1+k_2+k_3)) = (a,b,c)$$

$$\begin{cases} k_1 + 2k_3 = a \\ 2k_1 - 2k_2 - k_3 = b \\ 3k_1 + k_2 + k_3 = c \end{cases}$$

A representação matricial deste sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

A resolução deste sistema de equações lineares, pelo método da condensação, é dada por

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & -2 & -1 & b \\ 3 & 1 & 1 & c \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2 = L_2 - 2L_1 \\ L_3 = L_3 - 3L_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & -2 & -5 & b-2a \\ 0 & 1 & -5 & c-3a \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & -5 & c-3a \\ 0 & -2 & -5 & b-2a \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3 = L_3 + 2L_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & -5 & c-3a \\ 0 & 0 & -15 & b-8a+2c \end{array}\right]$$

Como $\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 3$ e $GI = 0$ para qualquer valor de a, b e c, então este sistema é um sistema possível e determinado, pelo que os vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ são geradores de $\mathbb{R}^3$.

2. Os vetores $\mathbf{v}_1 = (1,2,3)$, $\mathbf{v}_2 = (0,-2,1)$ e $\mathbf{v}_3 = (2,-1,1)$ são linearmente independentes?

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{o}$$

$$k_1(1,2,3) + k_2(0,-2,1) + k_3(2,-1,1) = (0,0,0)$$

$$(k_1, 2k_1, 3k_1) + (0,-2k_2,k_2) + (2k_3,-k_3,k_3) = (0,0,0)$$

$$((k_1+2k_3), (2k_1-2k_2-k_3), (3k_1+k_2+k_3)) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} k_1 + 2k_3 = 0 \\ 2k_1 - 2k_2 - k_3 = 0 \\ 3k_1 + k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$

A representação matricial deste sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A resolução deste sistema de equações lineares, pelo método da condensação, é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3=L_3-3L_1}{\overset{L_2=L_2-2L_1}{}} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3 \leftrightarrow L_2}{} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3=L_3+2L_2}{} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & 0 \end{array}\right]$$

Como $\operatorname{car}(\mathbf{A}) = \operatorname{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 3$ e $GI = 0$, então este sistema é um sistema possível e determinado, pelo que os vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ são linearmente independentes.

Logo, os vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

■

Exercício 49.

Verifique se os vetores $\mathbf{v}_1 = (0,1,-1)$ e $\mathbf{v}_2 = (2,2,0)$ pertencentes ao subespaço representado pelo conjunto $V_1 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : c = a - b\}$ formam uma base desse subespaço.

Resolução.

Os vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ são formados por três elementos, logo são candidatos a formar uma base de V_1.

1. $\mathbf{v}_1 = (0,1,-1)$ e $\mathbf{v}_2 = (2,2,0)$ são geradores de um espaço vetorial de V_1?

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{v}_i$$

$$(a,b,(a-b)) = k_1(0,1,-1) + k_2(2,2,0)$$
$$(a,b,(a-b)) = (0,k_1,-k_1) + (2k_2,2k_2,0)$$
$$(a,b,(a-b)) = (2k_2,(2k_2+k_1),-k_1)$$

$$\begin{cases} 2k_2 = a \\ k_1 + 2k_2 = b \\ -k_1 = a - b \end{cases}$$

A representação matricial deste sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ a-b \end{bmatrix}$$

A resolução deste sistema de equações lineares, pelo método da condensação, é dada por

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & a \\ 1 & 2 & b \\ -1 & 0 & a-b \end{array}\right]_{L_1 \leftrightarrow L_3} \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & a-b \\ 1 & 2 & b \\ 0 & 2 & a \end{array}\right]_{L_2 = L_2 + L_1} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & a-b \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 2 & a \end{array}\right]_{L_3 = L_3 - L_2} \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & a-b \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Como $\operatorname{car}(\mathbf{A}) = \operatorname{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 2$ e, neste caso, $GI = 0$, este sistema é um sistema possível e determinado, pelo que os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são geradores deV_1.

2. $\mathbf{v}_1 = (0, 1, -1)$ e $\mathbf{v}_2 = (2, 2, 0)$ são linearmente independentes?

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{o}$$

$$k_1 (0, 1, -1) + k_2 (2, 2, 0) = (0, 0, 0)$$

$$(0, k_1, -k_1) + (2k_2, 2k_2, 0) = (0, 0, 0)$$

$$(2k_2, (2k_2 + k_1), -k_1) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} 2k_2 = 0 \\ k_1 + 2k_2 = 0 \\ -k_1 = 0 \end{cases}$$

A representação matricial deste sistema é dada por

$$\left[\begin{array}{cc} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right]$$

A resolução deste sistema de equações lineares, pelo método da condensação, é dada por

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{array}\right]_{L_1 \leftrightarrow L_3} \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right]_{L_2 = L_2 + L_1} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right]_{L_3 = L_3 - L_2} \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Como $\operatorname{car}(\mathbf{A}) = \operatorname{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 2$ e $GI = 0$, então este sistema é um sistema possível e determinado, pelo que os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são linearmente independentes.

Logo, sendo os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ linearmente independentes e geradores, formam uma base de V_1.

■

Exercício 50.
Mostre que os vetores $\mathbf{v}_1 = (3,2,1)$, $\mathbf{v}_2 = (-1,-1,-1)$ e $\mathbf{v}_3 = (4,2,-2)$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$, e escreva o vetor $\mathbf{v}_4 = (4,6,3)$ nessa base.

Resolução.

Os vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ são formados por três elementos, logo são candidatos a formar uma base de $\mathbb{R}^3$.

1. $\mathbf{v}_1 = (3,2,1)$, $\mathbf{v}_2 = (-1,-1,-1)$ e $\mathbf{v}_3 = (4,2,-2)$ são geradores de $\mathbb{R}^3$?

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{v}$$

$$k_1(3,2,1) + k_2(-1,-1,-1) + k_3(4,2,-2) = (a,b,c)$$

$$(3k_1, 2k_1, k_1) + (-k_2, -k_2, -k_2) + (4k_3, 2k_3, -2k_3) = (a,b,c)$$

$$((3k_1 - k_2 + 4k_3), (2k_1 - k_2 + 2k_3), (k_1 - k_2 - 2k_3)) = (a,b,c)$$

$$\begin{cases} 3k_1 - k_2 + 4k_3 = a \\ 2k_1 - k_2 + 2k_3 = b \\ k_1 - k_2 - 2k_3 = c \end{cases}$$

A representação matricial deste sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

A resolução deste sistema de equações lineares, pelo método da condensação, é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 4 & a \\ 2 & -1 & 2 & b \\ 1 & -1 & -2 & c \end{array}\right] \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & c \\ 2 & -1 & 2 & b \\ 3 & -1 & 4 & c \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 = L_2 - 2L_1 \\ L_3 = L_3 - 3L_1}}{} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & c \\ 0 & 1 & 6 & b-2c \\ 0 & 2 & 10 & a-3c \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - 2L_2}{} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & c \\ 0 & 1 & 6 & b-2c \\ 0 & 0 & -2 & a-2b+c \end{array}\right]$$

Como $\operatorname{car}(\mathbf{A}) = \operatorname{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 3$ e $GI = 0$, então este sistema é um sistema possível e determinado, pelo que os vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ geram $\mathbb{R}^3$.

a) $\mathbf{v}_1 = (3,2,1)$, $\mathbf{v}_2 = (-1,-1,-1)$ e $\mathbf{v}_3 = (4,2,-2)$ são linearmente independentes?

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{o}$$

$$k_1(3,2,1) + k_2(-1,-1,-1) + k_3(4,2,-2) = (0,0,0)$$

$$(3k_1, 2k_1, k_1) + (-k_2, -k_2, -k_2) + (4k_3, 2k_3, -2k_3) = (0,0,0)$$

$$((3k_1 - k_2 + 4k_3), (2k_1 - k_2 + 2k_3), (k_1 - k_2 - 2k_3)) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} 3k_1 - k_2 + 4k_3 = 0 \\ 2k_1 - k_2 + 2k_3 = 0 \\ k_1 - k_2 - 2k_3 = 0 \end{cases}$$

A representação matricial deste sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A resolução deste sistema de equações lineares, pelo método da condensação, é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right]_{L_1 \leftrightarrow L_3} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right]_{\substack{L_2 = L_2 - 2L_1 \\ L_3 = L_3 - 3L_1}} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 0 \end{array}\right]_{L_3 = L_3 - 2L_2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

Como $\operatorname{car}(\mathbf{A}) = \operatorname{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 3$ e $GI = 0$, então este sistema é um sistema possível e determinado, pelo que os vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ são linearmente independentes.

Logo, sendo os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ linearmente independentes e geradores, formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

As coordenadas do vetor $\mathbf{v}_4$ são obtidas por

$$k_1\,(3,2,1) + k_2\,(-1,-1,-1) + k_3\,(4,2,-2) = (4,6,3)$$

A representação matricial deste sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

A resolução deste sistema de equações lineares, pelo método da condensação, é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right]_{L_1 \leftrightarrow L_3} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 4 & 4 \end{array}\right]_{\substack{L_2 = L_2 - 2L_1 \\ L_3 = L_3 - 3L_1}} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & -5 \end{array}\right]_{L_3 = L_3 - 2L_2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{array}\right]$$

Como $\operatorname{car}(\mathbf{A}) = \operatorname{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 3$ e $GI = 0$, então

$$\begin{cases} k_1 - k_2 - 2k_3 = 3 \\ k_2 + 6k_3 = 0 \\ -2k_3 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = -7 \\ k_2 = -15 \\ k_3 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

pelo que $\mathbf{v}_4 = -7\mathbf{v}_1 - 15\mathbf{v}_2 + \frac{5}{2}\mathbf{v}_3$.

■

Exercício 51.

Considere os vetores $\mathbf{v}_1 = (1,0,1)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,2)$ e $\mathbf{v}_3 = (1,1,3)$ e $\mathbf{v}_4 = (1,-1,-1)$ e determine um subespaço vetorial gerado pelos 4 vetores. Indique, também, uma base e a dimensão desse subespaço.

Resolução.

O espaço vetorial gerado pelos 4 vetores é o conjunto de todos os vetores que se podem definir como combinação linear destes vetores. Ou seja, tem de ser possível o sistema

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{v}_i$$

$$(a,b,c) = k_1(1,0,1) + k_2(0,1,2) + k_3(1,1,3) + k_4(1,-1,-1)$$
$$(a,b,c) = (k_1,0,k_1) + (0,k_2,2k_2) + (k_3,k_3,3k_3) + (k_4,-k_4,-k_4)$$
$$(a,b,c) = ((k_1 + k_3 + k_4), (k_2 + k_3 - k_4), (k_1 + 2k_2 + 3k_3 - k_4))$$

$$\begin{cases} k_1 + k_3 + k_4 = a \\ k_2 + k_3 - k_4 = b \\ k_1 + 2k_2 + 3k_3 - k_4 = c \end{cases}$$

A representação matricial deste sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

A resolução deste sistema de equações lineares, pelo método da condensação, é

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & -1 & b \\ 1 & 2 & 3 & -1 & c \end{array}\right]_{L_3 = L_3 - L_1} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 2 & 2 & -2 & c-a \end{array}\right]_{L_3 = L_3 - 2L_2} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-a-2b \end{array}\right]$$

Para que este sistema seja possível, a condição $\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 2$ tem de ser verificada, pelo que $c - a - 2b = 0$. Logo, o subespaço gerado pelos vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$, será $\mathbb{V}_1 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : c = a + 2b\} = \{(a,b,a+2b) \in \mathbb{R}^3\}$.

Sendo $\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 2$, a dimensão deste espaço é 2. Como o número de vetores que constitui uma base é dado pela $\dim(\mathbb{V}_1)$, logo escolhem-se 2 vetores, por

exemplo, $\mathbf{v}_1 = (1,0,1)$ e $\mathbf{v}_2 = (0,1,2)$.

Para ter uma base de $\mathbb{V}_1$, basta provar que estes vetores são linearmente independentes, pois, como $\dim(\mathbb{V}_1) = 2$, qualquer conjunto de 2 vetores de $\mathbb{V}_1$ que sejam linearmente independentes também geram $\mathbb{V}_1$ e, por isso, formam uma base de $\mathbb{V}_1$.

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{o}$$

$$k_1(1,0,1) + k_2(0,1,2) = (0,0,0)$$
$$(k_1,0,k_1) + (0,k_2,2k_2) = (0,0,0)$$
$$(k_1,k_2,(k_1+2k_2)) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = 0 \\ k_1 + 2k_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

O sistema é um sistema possível e determinado, pelo que os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são linearmente independentes e, por isso, formam uma base de $\mathbb{V}_1$.

■

Exercício 52.

Identifique uma base do espaço vetorial $\mathbb{M} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, \forall a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$

Resolução.

Sejam, por exemplo, os seguintes elementos não nulos do espaço vetorial $\mathbb{M}$ candidatos a formar uma base de $\mathbb{M}$

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Serão $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ e $\mathbf{M}_3$ geradores de $\mathbb{M}$?

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} k_i\mathbf{v}_i$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_1 \\ 0 & k_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k_2 & 0 \\ 0 & k_2 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -k_3 & 0 \\ 0 & k_3 \\ 0 & -k_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + 2k_2 - k_3 & 0 \\ 0 & k_1 + k_2 + k_3 \\ 0 & k_1 + k_2 - k_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 - k_3 = a \\ k_1 + k_2 + k_3 = b \\ k_1 + k_2 - k_3 = c \end{cases}$$

A representação matricial deste sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

A resolução deste sistema de equações lineares, pelo método da condensação, é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & -1 & c \end{array}\right] \begin{matrix} \\ L_2=L_2-L_1 \\ L_3=L_3-L_1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & -1 & 2 & b-a \\ 0 & -1 & 0 & c-a \end{array}\right]_{L_3=L_3-L_2} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & -1 & 2 & b-a \\ 0 & 0 & -2 & c-b \end{array}\right]$$

Como $\operatorname{car}(\mathbf{A}) = \operatorname{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 3, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $GI = 0$ e este sistema é um sistema possível e determinado, pelo que $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ e $\mathbf{M}_3$ são geradores do espaço vetorial $\mathbf{M}$.

a) Serão $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ e $\mathbf{M}_3$ linearmente independentes?

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{o}$$

$$k_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 - k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 - k_3 = 0 \end{cases}$$

A representação matricial deste sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

A resolução deste sistema de equações lineares, pelo método da condensação, é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2=L_2-L_1 \\ L_3=L_3-L_1 \end{array} \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

Como car $(\mathbf{A})$ = car $([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 3$ e $GI = 0$, então este sistema é um sistema possível e determinado. Neste contexto, $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ e $\mathbf{M}_3$ são linearmente independentes e existem k_1, k_2 e k_3.

Logo, $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ e $\mathbf{M}_3$ formam uma base de $\mathbb{M}$.

■

Exercício 53.

Considere o conjunto $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$

1. Verifique que A é um subespaço.
2. Determine a dimensão e uma base de A.

Resolução.

1. A é um subespaço se, e só se
   - $\mathbf{o} \in A$
     $\mathbf{o} = (0, 0, 0) \in A$ porque $0 + 0 - 0 = 0$
   - $\forall k \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u} \in A$, $k\mathbf{u} \in A$
     $\mathbf{u} = (x, y, z) \in A$, logo $x+y-z = 0$. Mas, sendo $\alpha\mathbf{u} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ e como $x + y - z = 0$, então $\alpha(x + y - z) = 0$, ou seja $\alpha x + \alpha y - \alpha z = 0$ e, por isso, $\alpha\mathbf{u} \in A$
   - $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in A, \mathbf{u}+\mathbf{v} \in A$
     Sejam $\mathbf{u} = (x, y, z)$, $\mathbf{v} = (a, b, c) \in A$, então $x + y - z = 0$ e $a + b - c = 0$. Mas $\mathbf{u}+\mathbf{v} = (x, y, z) + (a, b, c) = (x+a, y+b, z+c)$ e como $x+y-z = 0$ e $a+b-c = 0$, então $(x+y-z)+(a+b-c) = (x+a)+(y+b)-(z+c) = 0$ e, por isso, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in A$.

   Logo, A é um subespaço.
2. $\dim(A) = 3 - 1 = 2$.
   $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + y\}$
   Como $(x, y, x + y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1)$, então os vetores geram A e, por isso, como a dimensão de A é dois, os vetores também são linearmente independentes. Logo, uma base para A pode ser $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$.

■

Exercício 54.

Verifique se o conjunto $B = \{(1, 0), (1, 1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ e, em caso afirmativo, encontre as coordenadas do vetor $(4, 3)$ nessa base.

Resolução.

$B = \{(1,0),(1,1)\}$ constitui uma base de $\mathbb{R}^2$ se, e só se, forem linearmente independentes ou gerarem $\mathbb{R}^2$ (ver 4.5).

Por questões didáticas, veja-se que verificam as 2 condições

1. $(1,0)$e $(1,1)$ são linearmente independentes
   $$\alpha(1,0)+\beta(1,1)=(0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-\beta=0 \\ \beta=0 \end{cases}$$
   Logo, os vetores são linearmente independentes.
2. $<(1,0),(1,1)>=\mathbb{R}^2$, isto é, B gera $\mathbb{R}^2$
   $$<(1,0),(1,1)>=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 : (a,b)=\alpha(1,0)+\beta(1,1)\}$$
   $$\begin{cases} a=\alpha+\beta \\ b=\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=a-b \\ \beta=b \end{cases}$$
   Os escalares α e β estão univocamente determinados, logo $<(1,0),(1,1)>=\mathbb{R}^2$.
   Portanto, o conjunto $B=\{(1,0),(1,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

Mostra-se, então, que o vetor $(4,3)$ se pode escrever de maneira única como combinação linear de $(1,0)$ e $(1,1)$

$$(4,3)=\alpha(1,0)+\beta(1,1) \Leftrightarrow \begin{cases} 4=\alpha+\beta \\ 3=\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=3 \end{cases}$$

Logo, $(4,3)=1(1,0)+3(1,1)$.

■

Exercício 55.

Considere os vetores de $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{u}=(2,1,0)$, $\mathbf{v}=(1,-1,2)$ e $\mathbf{w}=(0,3,-4)$ e

1. caracterize o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $\mathbf{u},\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.
2. determine a dimensão do subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $\mathbf{u},\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.
3. averigúe se os vetores $\mathbf{u}_1=(-4,-8,0)$ e $\mathbf{u}_2=(2,1,0)$ pertencem ao subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $\mathbf{u},\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

Resolução.

1. Seja $W=<\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}>$. Então,
   $$W=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : (a,b,c)=\alpha_1(2,1,0)+\alpha_2(1,-1,2)+\alpha_3(0,3,-4)\}$$
   $$\begin{cases} a=2\alpha_1+\alpha_2 \\ b=\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3 \\ c=2\alpha_2-4\alpha_3 \end{cases}$$
   $$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & a \\ 1 & -1 & 3 & b \\ 0 & 2 & -4 & c \end{array}\right]_{L_1\leftrightarrow L_2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & b \\ 2 & 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & -4 & c \end{array}\right]_{L_2=L_2-2\times L_1}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & b \\ 0 & 3 & -6 & -2b+a \\ 0 & 2 & -4 & c \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2=1/3\times L_2 \\ L_3=1/2\times L_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & b \\ 0 & 1 & -2 & \frac{-2b+a}{3} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{c}{2} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_1=L_1+L_2 \\ \\ L_3=L_3-L_2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{b+a}{3} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{-2b+a}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3c+4b-2a}{6} \end{array}\right]$$

O sistema é possível se $\dfrac{3c+4b-2a}{6}=0$, isto é, se $-2a+4b+3c=0$.

Logo, $W=<u,v,w>=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3:\ -2a+4b+3c=0\}$.

2. A dimensão de W é igual ao número de variáveis independentes na caracterização de W, portanto $\dim(W)=2$, ou a dimensão de W é igual à dimensão de $\mathbb{R}^3$ menos o número de condições, portanto $\dim(W)=3-1=2$.

3. Se a condição imposta pela caracterização de W se verificar, então os vetores pertencem a $W=<\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}>$

   $\mathbf{u}_1=(-4,-8,0)$: $\quad -2\times(-4)+4\times(-8)+3\times 0=8-32+0=-24\neq 0$, logo $\mathbf{u}_1\notin W$

   $\mathbf{u}_2=(2,1,0)$: $\quad -2\times 2+4\times 1-3\times 0=-4+4+0=0$, logo $\mathbf{u}_2\in W$

■

Exercício 56.

Determine a dimensão do subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $\mathbf{u}=(1,0,2)$, $\mathbf{v}=(2,1,0)$ e $\mathbf{w}=(5,1,6)$.

Resolução.

Como a dimensão do subespaço gerado por $\mathbf{u},\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ é igual à característica da matriz que tem os vetores por coluna, então

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3=L_3-2\times L_1 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3=L_3+4\times L_2 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como $\mathrm{car}(\mathbf{A})=2$, logo a dimensão do subespaço gerado por $\mathbf{u},\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ é 2.

■

Exercício 57.

Determine a dimensão do subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$, gerado pelos vetores $\mathbf{u}=(1,0,0,0)$, $\mathbf{v}=(3,-2,5,4)$, $\mathbf{w}=(2,0,1,-3)$ e $\mathbf{t}=(1,2,-1,1)$.

Resolução.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}_{L_2=-1/2\times L_2} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}_{\substack{L_3=L_3-5\times L_2 \\ L_4=L_4-4\times L_2}}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}_{L_4=L_4+3\times L_3} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{bmatrix}$$

Como $\text{car}(\mathbf{A}) = 4$, a dimensão do subespaço gerado pelos vetores é 4.

■

Exercício 58.

Seja V um espaço de dimensão 4. Indique, justificando, o valor lógico das afirmações:

1. "Qualquer conjunto de 3 vetores de V é um conjunto de vetores linearmente independente".
2. "Um conjunto de vetores linearmente independente tem sempre 4 vetores".
3. "Um conjunto de 5 vetores de sempre um conjunto linearmente dependente".
4. "Um conjunto gerador pode ter só 3 vetores".
5. "Se A é um subconjunto de V linearmente independente, então qualquer conjunto B, tal que $B \supseteq A$, é linearmente dependente".
6. "Sendo $\mathbf{u}$ um vetor não nulo, o vetor $\mathbf{u}$ é linearmente dependente".

Resolução.

Se V é um espaço de dimensão 4

1. Falso, basta, por exemplo, que um deles seja o vetor nulo, para que os vetores sejam linearmente dependentes.
   a) Falso, pode ter 4 ou menos vetores.
   b) Verdadeiro, se a dimensão do espaço é 4, então no máximo existem 4 vetores linearmente independentes. Logo, qualquer conjunto com mais de 4 vetores é sempre um conjunto de vetores linearmente dependentes.
   c) Falso, se a dimensão do espaço é 4, então qualquer conjunto gerador tem 4 ou mais vetores.
   d) Falso, em particular se $B = A$, $B \supseteq A$ e B é linearmente independente.
   e) Falso, se $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, então $\{\mathbf{u}\}$ é um conjunto linearmente independente.

■

Exercício 59.

Calcule os valores e os vetores próprios da matriz $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$.

Resolução.

O procedimento será, tal como no exemplo anterior, calcular o polinómio característico, a equação característica, os valores próprios e os respetivos vetores próprios. Porque $\mathbf{B}$ é uma matriz de ordem 3, o polinómio característico é de grau 3, logo haverá no máximo três valores próprios e correspondentes vetores próprios.

Cálculo da matriz $\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}$

$$\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

- resolução da equação característica

$$|\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}| = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{matrix} \right|_{C_3=C_3+C_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 1-\lambda & -3 & 0 \\ 3 & -5-\lambda & -2-\lambda \\ 6 & -6 & -2-\lambda \end{matrix} \right|_{L_2=L_2-L_3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 1-\lambda & -3 & 0 \\ -3 & 1-\lambda & 0 \\ 6 & -6 & -2-\lambda \end{matrix} \right|_{T.L.C_3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 + 0 + (-2-\lambda).(-1)^{3+3} \left| \begin{matrix} 1-\lambda & -3 \\ -3 & 1-\lambda \end{matrix} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow (-2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 9\right] = 0$$

- cálculo dos valores próprios

$(-2-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-4) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$ (raiz dupla) $\vee\ \lambda = 4$

- e finalmente os cálculo dos vetores próprios

$$(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{u} = \mathbf{o} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Para $\lambda = -2$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & 6 & 0 \end{array}\right]_{\substack{L_2=L_2-L_1 \\ L_3=L_3-2L_1 \\ L_1=\frac{1}{3}L_1}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_2 + u_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = u_2 - u_3 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$V_{-2} = \left\{ \begin{bmatrix} u_2 - u_3 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} : u_2, u_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \{(u_2 - u_3, u_2, u_3) : u_2, u_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$

- Para $\lambda = 4$

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -9 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2 = L_2 + L_1 \\ L_3 = L_3 + 2L_1 \\ L_1 = -\frac{1}{3} L_1 \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -12 & 6 & 0 \\ 0 & -12 & 6 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3 = L_3 - L_2 \\ L_2 = -\frac{1}{6} L_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 - u_3 = 0 \\ 2u_2 - u_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = u_2 \\ u_3 = 2u_2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$V_4 = \left\{ \begin{bmatrix} u_2 \\ u_2 \\ 2u_2 \end{bmatrix} : u_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \{(u_2, u_2, 2u_2), u_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$

■

4.7.1. Exercícios resolvidos em MATLAB

Exercício 60.

Considere os vetores $\mathbf{u}_1 = (1,1,1)$; $\mathbf{u}_2 = (1,1,a)$ e $\mathbf{u}_3 = (1,a,a)$, determine os valores de a para os quais os vetores são linearmente independentes.

Resolução. Os vetores são linearmente independentes se o determinante da matriz formada por esses vetores for não nulo.

SCRIPT MATLAB 4.1

```
>> syms a
>> solve(det([1,1,1;1,1,a;1,a,a]))
ans =
     1
     1
```

Logo, os vetores são linearmente independentes se, e só se, $a \neq 1$.

■

Exercício 61.

Considere a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, determine os valores e vetores próprios da matriz.

Resolução. Para calcular os valores e vetores próprios da matriz, basta utilizar a função `eig`

SCRIPT MATLAB 4.2

```
>> format rat;
>> a=[1 ,0, 1, 0;0, -1, -1, -1; 1, -1, 0, 2;0, -1, 2, 1];
>> [V,D]=eig(a)
V =
     866/3253      -191/2418       806/875     -2375/8708
    -939/2173      -2125/2541      138/961      1134/3713
   -1301/1686       77/409         205/3408     -159/263
     350/913       -1234/2425     -371/1040     -4036/5907
D =
    -805/424          0              0              0
       0           -765/553          0              0
       0              0           1093/1026         0
       0              0              0           2628/817
```

As colunas de V são os vetores próprios e os elementos da diagonal de D os valores próprios.

■

4.8. Exercícios propostos

4.8.1. Exercícios relativos a espaços vetoriais

1. Averigúe se o conjunto dos números complexos, $\mathbb{C}$, algebrizados pelas operações usuais de adição de números complexos e multiplicação de um escalar real por um número complexo, é um espaço vetorial real.
2. Averigúe se o conjunto dos polinómios de variável real x e de grau 3,
   $$\mathcal{P}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \quad \forall a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \wedge a_3 \neq 0,$$
   algebrizados pelas operações usuais de adição de polinómios e multiplicação de um escalar real por um polinómio, é um espaço vetorial real.
3. Averigúe se os seguintes conjuntos de vetores de $\mathbb{R}^2$ são espaços vetoriais reais, relativamente às seguintes operações de adição de vetores e multiplicação de um escalar por um vetor

a) $A: \begin{cases} (a_1,b_1)+(a_2,b_2)=((a_1+a_2),(b_1+b_2)) \\ k(a_1,b_1)=(0,kb_1) \end{cases}$;

b) $B: \begin{cases} (a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,0) \\ k(a_1,b_1)=(ka_1,kb_1) \end{cases}$;

c) $C: \begin{cases} (a_1,b_1)+(a_2,b_2)=((a_1+a_2),(b_1+b_2)) \\ k(a_1,b_1)=((ka_1+k+1),(kb_1+k-2)) \end{cases}$.

4. Averigúe se os seguintes conjuntos, algebrizados pelas operações usuais de adição de vetores e multiplicação de um escalar real por um vetor, são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$

a) $A=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 : a=b\}$;

b) $B=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 : a=b-1\}$;

c) $C=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 : a\in\mathbb{N}\}$;

d) $D=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 : |a|\leq 1\}$;

e) $F=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 : a=b^2\}$.

5. Averigúe se os seguintes conjuntos, algebrizados pelas operações usuais de adição de vetores e multiplicação de um escalar real por um vetor, são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$

a) $A=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : b=2a \wedge c=0\}$;

b) $B=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : b=0 \vee c=0\}$;

c) $C=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : c=2\}$;

d) $D=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : ab=0\}$;

e) $E=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : a-b\leqslant 0\}$;

f) $F=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : a+b\leqslant 1\}$;

g) $G=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : a^2+b^2=1\}$;

h) $H=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : a^2+b^2\leqslant 1\}$;

i) $I=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : |a|=|b|\}$.

6. Averigúe se os seguintes conjuntos, algebrizados pela operações usuais de adição de vetores e multiplicação de um escalar real por um vetor, são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^4$

a) $A=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 : b=2a+1 \wedge c=d\}$;

b) $B=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 : 2a-2b+c=a+3c-d=2c-3d\}$.

7. Averigúe se os seguintes conjuntos, algebrizados pela operações usuais de adição de matrizes e multiplicação de um escalar real por uma matriz, são subespaços vetoriais

a) $A=\left\{\begin{bmatrix} a & 2a \\ -a & 3b \end{bmatrix}\in \mathbf{M}_2 : a,b\in\mathbb{R}\right\}$,

onde $\mathbf{M}_2$ representa o espaço das matrizes reais quadradas de ordem 2

b) $C = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & a+c \\ 3a & b & 0 \\ 0 & -b & -2a \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3 : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$,

onde M_3 representa o espaço das matrizes reais quadradas de ordem 3

8. Averigúe se os seguintes conjuntos de funções reais de variável real, algebrizados pela operações usuais de adição de funções e multiplicação de um escalar real por uma função, são subespaços vetoriais do espaço F, das seguintes funções reais de variável real

   a) $A = \{f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$;

   b) $B = \{f(x) = \ln(g(x)), \forall x \in \mathbb{R}\}$;

   c) $C = \{f(x) = p_1(x)\cos(x) + p_2(x)\sin(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$,
   sendo $p_1(x)$ e $p_2(x)$ polinómios reais de grau igual ou inferior a 1;

   d) $D = \{(p(x) = ax^2 + bx + c : 3a - 2b - c = 0) \in \mathcal{P}_2,\ \forall a, b, c \in \mathbb{R}\}$,
   onde $\mathcal{P}_2$ é o espaço dos polinómios reais de grau igual ou inferior a 2.

9. Averigúe se o conjunto
   $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{v}_1 = a(1,1,-1), \mathbf{v}_2 = b(1,0,1) \wedge \mathbf{v}_3 = (0,2,3)\}$,
   algebrizado pelas operações usuais de adição de vetores e multiplicação de um escalar real por um vetor, é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

10. Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$ e escreva o vetor $\mathbf{v}_3 = (2,6,0)$ como combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1 = (1,1,-1)$ e $\mathbf{v}_2 = (0,2,1)$.

11. Considere o espaço $\mathcal{P}_2$ dos polinómios reais de grau igual ou inferior a 2 e escreva o polinómio $\mathbf{p}_3 = 2x^2 - 3x - 2$ como combinação linear dos polinómios $\mathbf{p}_1 = 2x^2 + x + 6$ e $\mathbf{p}_2 = 2x^2 + 4$.

12. Considere os vetores $\mathbf{v}_1 = (-1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (5,-1)$ e $\mathbf{v}_3 = (1,2)$, do espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$, e

    a) verifique que $\mathbf{v}_3$ é combinação linear de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$;

    b) identifique o vetor $\mathbf{v}_4 \in \mathbb{R}^2$ que tenha a primeira coordenada nula e seja combinação linear de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$.

13. Considere os vetores $\mathbf{v}_1 = (1,1,-1)$ e $\mathbf{v}_2 = (2,0,1)$, do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$. e

    a) verifique que $\mathbf{v}_3 = (3,1,1)$ não é combinação linear de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$;

    b) identifique o vetor $\mathbf{v}_4 \in \mathbb{R}^3$ que tenha a primeira coordenada nula, a segunda dupla da terceira e seja combinação linear de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$;

    c) identifique o vetor $\mathbf{v}_5 \in \mathbb{R}^3$ que tenha a segunda coordenada nula e seja combinação linear de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

14. Considere o vetor nulo de $\mathbb{R}^2$, o vetor $\mathbf{o} = (0,0)$, e

    a) escreva, de duas formas distintas, este vetor nulo como combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1 = (-1,3)$ e $\mathbf{v}_2 = (2,-6)$;

    b) diga se este vetor nulo pode, ou não, ser escrito como combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_3 = (1,1)$ e $\mathbf{v}_4 = (2,-1)$.

15. Verifique que os vetores $\mathbf{v}_1 = (-1,0,0)$, $\mathbf{v}_2 = (2,1,0)$ e $\mathbf{v}_3 = (5,-7,3)$ geram o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.
16. Averigúe se o vetor $\mathbf{v}_3 = (1,2,3)$ pertence ao subespaço vetorial real gerado pelos vetores $\mathbf{v}_1 = (1,0,1)$ e $\mathbf{v}_2 = (2,1,1)$.
17. Verifique que o conjunto de polinómios
$$\mathcal{P} = \{p_1, p_2, p_3 : p_1(x) = x^2 + 2,\ p_2(x) = x,\ p_3(x) = x^2 + 3x + 1\}$$
gera um espaço de polinómios reais de grau igual ou inferior a 2.
18. Verifique que o conjunto de polinómios
$$\mathcal{P} = \left\{p_1, p_2, p_3 : p_1(x) = (1-x)^3,\ p_2(x) = (1-x)^2,\ p_3 = (x)(1-x), p_4 = 1\right\}$$
gera um espaço de polinómios reais de grau igual ou inferior a 3.
19. Considere os vetores $\mathbf{v}_1 = (1,0,2)$, $\mathbf{v}_2 = (1,-1,1)$, $\mathbf{v}_3 = (0,-1,-1)$ e $\mathbf{v}_4 = (2,-1,3)$ e verifique que o subespaço vetorial del $\mathbb{R}^3$ gerado pelo conjunto $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ coincide com o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ gerado pelo conjunto $B = \{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$.
20. Determine $c, d \in \mathbb{R}$ de modo que o vetor $\mathbf{v}_1 = (1,1,c,d)$ pertença ao subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ gerado pelo conjunto $A = \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, com $\mathbf{v}_2 = (1,0,2,1)$ e $\mathbf{v}_3 = (2,-2,4,4)$.
21. Considere os vetores $\mathbf{v}_1 = (-1,0,-1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,-1,-1)$ e $\mathbf{v}_3 = (0,2,c-5)$, do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ e
    a) determine o valor do parâmetro $c \in \mathbb{R}$ para o qual os três vetores são linearmente independentes;
    b) para $c = 1$, escreva o vetor $\mathbf{v}_4 = (1,1,1)$ como combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$;
    c) para $c = 9$, encontre o subespaço $A \in \mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$.
22. Considere os vetores $\mathbf{v}_1 = (1,1,3)$, $\mathbf{v}_2 = (0,3,1)$ e $\mathbf{v}_3 = (2,-7,3)$, do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ e
    a) verifique que $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são linearmente independentes;
    b) identifique os coeficientes que tornam $\mathbf{v}_3$ combinação linear de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$;
    c) identifique um vetor $\mathbf{v}_4 \in \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$ sejam linearmente dependentes;
    d) encontre o subespaço $A \in \mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.
23. Averigúe a dependência/independência linear dos seguintes conjuntos
    a) $A = \{(1,2),(3,4)\}$;
    b) $B = \{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\}$;
    c) $C = \{(1,0,-1),(2,-2,2),(3,0,1)\}$;
    d) $D = \{(0,0,0,0)\}$;
    e) $E = \{(1,0,0,0),(2,1,0,0),(3,2,1,0),(4,3,2,1)\}$;
    f) O conjunto formado pelos vetores $\mathbf{v}_1 = (a,1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,a,1)$ e $\mathbf{v}_3 = (1,1,a)$;
    g) $G = \{-3x^2, 2x^2 + x + 1, x + 4\}$, do espaço das funções reais de variável real;

h) O conjunto formado pelos vetores do espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$ $\mathbf{v}_1 = (\cos(t), \sin(t))$, $\mathbf{v}_2 = (\cos(2t), \sin(2t))$ e $\mathbf{v}_3 = (\cos(3t), \sin(3t))$.

24. Considere as matrizes $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ e

a) verifique que as matrizes $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ e $\mathbf{A}_3$ são linearmente dependentes;

b) verifique que as matrizes $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ e $\mathbf{A}_4$ são linearmente independentes;

c) identifique o subespaço gerado por $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ e $\mathbf{A}_3$.

25. Considere o conjunto $V = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ e verifique

a) que os elementos de V são linearmente independentes;

b) se os elementos de V geram o espaço das matrizes quadradas de 2ª ordem.

26. Considere as matrizes $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ e

a) identifique os valores de a e b para os quais as 3 matrizes sejam linearmente independentes;

b) identifique os valores de a e b para os quais as 3 matrizes sejam linearmente dependentes;

c) estabeleça a relação de dependência entre as 3 matrizes.

27. Averigúe se os vetores $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1)$ e $\mathbf{v}_2 = (2, 3, 4)$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

28. Considere os vetores $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (4, 2, 6)$ e $\mathbf{v}_3 = (-1, 1, -3)$, do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, e

a) averigúe se existe uma base formada por estes 3 vetores;

b) identifique qual a dimensão do espaço gerado pelos 3 vetores.

29. Dados os vetores $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 1)$ e $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 0)$, obtenha um vetor $\mathbf{v}_3$ tal que os vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ formem uma base de $\mathbb{R}^3$.

30. Considere os vetores $\mathbf{v}_1 = (2, 2, 4)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 2)$ e $\mathbf{v}_3 = (5, -1, 0)$, do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, e

a) verifique se $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$;

b) diga qual o espaço vetorial gerado por $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

31. Considere os vetores do espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$, $\mathbf{v}_1 = (1, 1, -1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 2, 0, 1)$ e $\mathbf{v}_4 = (1, 3, 1, 2)$ e

a) identifique o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ gerado por estes 4 vetores;

b) diga qual a dimensão desse subespaço;

c) indique uma sua base desse subespaço;

d) indique as componentes do vetor $\mathbf{v}_5 = (1, 0, -2, -1)$ na base que definiu na alínea anterior.

32. Considere os vetores do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{v}_1 = (1,0,-1)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,-1)$, $\mathbf{v}_3 = (-2,3,-1)$ e $\mathbf{v}_4 = (0,-1,1)$ e
    a) identifique o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ gerado por estes 4 vetores;
    b) diga qual a dimensão desse subespaço;
    c) indique uma sua base desse subespaço;
    d) indique as componentes dos vetores $\mathbf{v}_5 = (1,-1,0)$ e $\mathbf{v}_6 = (1,1,-2)$ na base que definiu na alínea anterior.
33. Considere o subespaço vetorial $A = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : c = 2a + 3b\}$ e
    a) averigúe se os vetores $\mathbf{v}_1 = (1,1,5)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,3)$ e $\mathbf{v}_3 = (1,0,2)$ geram A;
    b) averigúe se os vetores $\mathbf{v}_2 = (0,1,3)$ e $\mathbf{v}_3 = (1,0,2)$ formam uma base de A.
34. Considere $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$ e $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2z\}$ e
    a) verifique que A e B são subespaços reais de $\mathbb{R}^3$;
    b) indique uma base de cada um desses subespaços;
    c) indique qual a dimensão de cada uma das bases;
    d) indique, justificando, um conjunto de vetores que, embora sendo geradores de B, não formam uma base.
35. Determine uma base do espaço vetorial cujos vetores são solução do sistema de equações lineares $\begin{cases} x - 2y + 3z - 3t &= 0 \\ 2x - 5y + z + 2t &= 0 \end{cases}$.
36. Verifique se os vetores $\mathbf{v}_1 = (0,3,-3)$ e $\mathbf{v}_2 = (-1,1,-3)$, do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, formam uma base do subespaço $A = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : c = 2a - b\}$.
37. Verifique se os polinómios $p_1(x) = x^2 - 1$, $p_2(x) = x$ e $p_3(x) = 3x^2 + 2x - 1$, formam uma base de $\mathcal{P}_2$, o espaço vetorial dos polinómios reais de grau igual ou inferior a 2.
38. Verifique se o conjunto de vetores $\mathbf{v}_1 = (1,0,0,\cdots,0)$, $\mathbf{v}_2 = (1,1,0,\cdots,0)$, $\cdots$, $\mathbf{v}_n = (1,1,1,\cdots,1)$ forma uma base do espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$.
39. Verifique se os $n+1$ polinómios reais de grau igual ou inferior a n, onde todos os polinómios têm graus distintos e todos os coeficientes desses polinómios são não nulos, formam uma base de $\mathcal{P}_n$.
40. Considere $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ e
    a) identifique o subespaço vetorial de $\mathbf{M}_{(3\times 1)}$, das matrizes reais coluna (3×1), gerado por estas 3 matrizes;
    b) diga qual a dimensão desse subespaço;
    c) indique duas bases desse subespaço que não incluam nenhuma das matrizes dadas.
41. Mostre que as matrizes reais quadradas de ordem 2,
$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

formam uma base de $\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, onde $\mathbf{M}_2$ representa o espaço das matrizes reais quadradas de ordem 2.

42. Mostre que uma qualquer base do subespaço vetorial,
$$A = \left\{ \begin{bmatrix} a & -a \\ 2a & b \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_2 : a, b \in \mathbb{R} \right\},$$
é composta por apenas duas matrizes de A, onde $\mathbf{M}_2$ representa o espaço das matrizes reais quadradas de ordem 2.

43. Mostre que os vetores de $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2} \right\}$, onde $\mathbf{M}_{3\times 2}$ representa o espaço das matrizes reais do tipo (3×2), formam uma base e encontre o subespaço gerado por esse conjunto.

44. Determine as coordenadas do vetor $\mathbf{w} = (1, 1, 1)$ na base U definida por
$U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 : \mathbf{u}_1 = (1, -2, 1), \mathbf{u}_2 = (0, 0, 1), \mathbf{u}_3 = (3, -1, 0)\}$.

45. Considere as bases do espaço dos polinómios reais de grau igual ou inferior a 2,
$A = \{p_1, p_2, p_3 : p_1(x) = x^2, p_2(x) = x, p_3(x) = 1\}$ e
$B = \{p_1, p_2, p_3 : p_1(x) = x^2 + x + 1, p_2(x) = 2x, p_3(x) = x^2 + 5\}$ e
   a) diga qual a matriz de mudança da base A para a base B;
   b) diga qual a matriz de mudança da base B para a base A;
   c) escreva o polinómio $p_4(x) = x^2 - 3x + 4$ na base B.

46. Determine duas bases do subespaço de $\mathbb{R}^4$ definido por
$A = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : (2a + b - c = 0) \wedge (a - c - d = 0)\}$.

47. Considere a base canónica de $\mathbb{R}^2$, $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 : \mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1)\}$, e a base $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 : (\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \wedge (\mathbf{v}_2 = 4\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2)\}$ e
   a) sabendo que a representação do vetor $\mathbf{w}$ na base V é $[\mathbf{w}]_V = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, diga qual a representação vetor $\mathbf{w}$ na base E, isto é, $[\mathbf{w}]_E$;
   b) sabendo que a representação do vetor $\mathbf{t}$ na base E é $[\mathbf{t}]_E = 5\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$, diga qual a representação vetor t na base V, isto é, $[\mathbf{t}]_V$.

48. Considere as bases de $\mathbb{R}^2$, $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 : \mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2\}$ e a base $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 : \mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2\}$. Sabendo que a representação do vetor $\mathbf{w}$ na base V é dada por $[\mathbf{w}]_V = 2\mathbf{v}_1 + 7\mathbf{v}_2$, diga qual a representação vetor $\mathbf{w}$ na base U, isto é, $[\mathbf{w}]_U$.

49. Considere a base canónica de $\mathbb{R}^3$,
$E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 : \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)\}$, e a base
$V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 : \mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{v}_2 = 2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3, \mathbf{v}_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\}$.
Escreva o vetor $\mathbf{v}_4 = 2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ na base V.

50. Considere que o vetor $\mathbf{w}$ se define na base $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ por $\mathbf{w} = (2, -1, 3)$ e na base $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ por $\mathbf{w} = (1, -1, -1)$. Sabendo que $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$, identifique $\mathbf{v}_3$.

4.8.2. Exercícios relativos a transformações lineares

1. Verifique se as seguintes transformações são, ou não, lineares
   a) $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T_1(x,y) = (2x - y, -y)$;
   b) $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T_2(x,y) = (xy, 2x + y)$;
   c) $T_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T_3(x,y) = (x + 1, 2y - 1)$;
   d) $T_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T_4(x,y) = (y, x^2)$;
   e) $T_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T_5(x,y) = (e^x, e^y)$;
   f) $T_6 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
   $(x,y) \rightsquigarrow (x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha), x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha))$;
   g) $T_7 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T_7(x,y,z) = (x + 2y, 3x, 2x - y + 4z)$;
   h) $T_8 : \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^2$ definida por $T_8 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (a, 2b + c - 3)$;
   i) $T_9 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T_9(x,y,z) = (x + y, 2x - y + z)$;
   j) $T_{10} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T_{10}(x,y,z,t) = (x - y, -3y, 0)$;
   k) $T_{11} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $T_{11}(x,y,z) = xy$;
   l) $T_{12} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\begin{cases} T_{12}(1,2,3) = (1,0,1) \\ T_{12}(1,0,7) = (3,0,1) \\ T_{12}(0,0,0) = (2,2,4) \end{cases}$;
   m) $T_{13} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por $T_{13}(x,y,z,t) = (1,-1,2,3)$.
2. Determine a imagem e o núcleo das seguintes transformações lineares
   a) $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T_1(x,y) = (2y, -x)$;
   b) $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T_2(x,y,z) = (2x, y, 0)$;
   c) $T_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T_3(x,y) = (2x + y, 2x - y)$;
   d) $T_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T_4(x,y,z) = (3x, 2y, z)$;
   e) $T_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T_5(x,y,z) = (x - z, 0, x + 2y)$;
   f) $T_6 : V \to V$ definida por $T_6(p(x)) = q(x) = p(x + 1)$, onde V representa o conjunto de todos os polinómios reais de grau igual ou inferior a n;
   g) $T_7 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\begin{cases} T_7(1,0) = (2,-1) \\ T_7(0,1) = (2,2) \end{cases}$;
   h) $T_8 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\begin{cases} T_8(1,1) = (1,0,-1) \\ T_8(-1,2) = (0,1,2) \end{cases}$;
   i) $T_9 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\begin{cases} T_9(1,0,0) \to T(1,0,0) = (1,0,1) \\ T_9(0,1,0) \to T(0,1,0) = (2,1,0) \\ T_9(0,0,1) \to T(0,0,1) = (0,-1,2) \end{cases}$;
   j) $T_{10} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\begin{cases} T_{10}(1,1,1) = (1,-2) \\ T_{10}(1,1,0) = (0,1) \\ T_{10}(1,0,0) = (2,3) \end{cases}$.

3. Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (2x - y, x + y)$ e determine
   a) a matriz da transformação linear associada à base canónica de $\mathbb{R}^2$;
   b) a matriz da transformação linear associada à base $U = \{(1, 1), (1, 2)\}$;
   c) a matriz da transformação linear associada à $V = \{(-1, 2), (2, -3)\}$;
   d) as coordenadas da imagem de $(-1, 3)$ na base canónica de $\mathbb{R}^2$;
   e) as coordenadas da imagem de $(-1, 3)$ na base $V = \{(-1, 2), (2, -3)\}$;
   f) as coordenadas do vetor cuja imagem é $(4, -3)$.

4. Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x - z, y + 2z)$ e determine
   a) a matriz da transformação linear associada às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$;
   b) a matriz da transformação linear associada às bases
      $U = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ e $V = \{(1, 1), (1, 2)\}$;
   c) as coordenadas da imagem de $(-1, 2, 3)$ na base canónica de $\mathbb{R}^2$;
   d) as coordenadas da imagem de $(-1, 2, 3)$ na base $V = \{(1, 1), (1, 2)\}$
   e) as coordenadas do vetor cuja imagem é $(4, -3)$.

5. Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por
   $T(x, y) = (2x, x + y, x - 4y)$
   e determine
   a) a matriz da transformação linear associada às bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$;
   b) a matriz da transformação linear associada às bases $U = \{(1, 2), (3, 4)\}$ e $V = \{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$;
   c) as coordenadas da imagem de $(-1, 3)$ na base canónica de $\mathbb{R}^3$;
   d) as coordenadas da imagem de $(-1, 3)$ na base
      $V = \{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$
   e) as coordenadas do vetor cuja imagem é $(2, 2, -3)$.

6. Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por
   $T(x, y, z) = (2x + y - z, x - y + z, -2z)$
   e determine
   a) a matriz da transformação linear associada à base canónica de $\mathbb{R}^3$;
   b) a matriz da transformação linear associada à base
      $U = \{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, -1, 2)\}$;
   c) a matriz da transformação linear associada à base
      $V = \{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$;
   d) as coordenadas da imagem de $(0, -1, 3)$ na base canónica de $\mathbb{R}^3$;
   e) as coordenadas da imagem de $(0, -1, 3)$ na base
      $V = \{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$
   f) as coordenadas do vetor cuja imagem é $(1, 4, -3)$.

7. Encontre uma transformação linear $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ cuja imagem seja gerada pelos vetores $(1,2,0)$ e $(-1,0,3)$.

8. Seja a transformação linear $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ definida por $\begin{cases} T(1,0) &= (1,1,2) \\ T(0,1) &= (2,1,-1) \end{cases}$ e determine

   a) a matriz da transformação linear e relativa às bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$;

   b) a matriz da transformação linear e relativa à base canónica de $\mathbb{R}^2$ e à base $V=\{(3,0,0),(0,2,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$;

   c) a expressão analítica de $T(x,y)$.

9. Considere a matriz associada à transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{M}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ e determine $T(1,2)$ na base $V=\{(1,-1),(0,-2)\}$.

10. Considere $\mathbf{M}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ a matriz associada a uma transformação linear e determine a imagem e o núcleo dessa transformação linear.

11. Determine os valores e os vetores próprios do endomorfismo
    $T(x,y)=(x-y,-2x+2y)$.
    Indique, justificando, se a matriz é diagonalizável.

12. Considere o espaço $\mathcal{P}_2$ dos polinómios de grau igual ou inferior a 2 e

    a) prove que os polinómios $p_1(x)=1$, $p_2(x)=2x$ e $p_3(x)=6x^2$ constituem uma base de $\mathcal{P}_2$;

    b) sendo $q_1(x)=2$, $q_2(x)=3x$ e $q_3(x)=4x^2$ uma nova base de $\mathcal{P}_2$, determine a matriz de mudança de base de $P\to Q$;

    c) determine as coordenadas de $p_4(x)=2x^2+x+1$ na base Q;

    d) determine os valores e os vetores próprios do endomorfismo
    $T\left(ax^2+bx+c\right)=ax^2+(a+b)x+(a+b+c)$;

    e) indique, justificando, se T é diagonalizável.

13. Considere e T:$\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ definida por $\begin{cases} T(1,0,0,0) &= (1-2,0,8) \\ T(0,1,0,0) &= (0,1,-2,-1) \\ T(0,0,1,0) &= (0,0,1,-1) \\ T(0,0,0,1) &= (0,0,01) \end{cases}$ e

    a) calcule o transformado de $(2,3,1,4)$.

    b) determine os valores e os vetores próprios do endomorfismo T.

    c) indique, justificando, se T é diagonalizável.

14. Considere um endomorfismo f definido em $\mathbb{R}^3$ pela matriz $\mathbf{A}_f=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e

    a) determine o núcleo de f e indique uma base.

    b) determine uma base da imagem de f.

c) determine $f(x,y,z)$ e mostre que f é uma transformação linear.

15. Considere a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ e $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear cuja matriz associada, na base canónica de $\mathbb{R}^3$ é a matriz $\mathbf{A}$. Determine
   a) $T(1,0,2)$.
   b) n_T e o $\mathrm{N}(T)$.
   c) c_T e uma base para $\mathrm{Im}(T)$.

16. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $T(x,y,z) = (x+2y-z, y+z, x+y-2z)$ e
   a) mostre que T é uma transformação linear.
   b) determine uma base e a dimensão da imagem e do núcleo de T.

17. Considere em $\mathbb{R}^2$ os vetores $\mathbf{u} = (1,2)$ e $\mathbf{v} = (4,5)$ e em $\mathbb{R}^3$ o vetor $\mathbf{w} = (1,0,0)$. e
   a) determine o subespaço S_1 de $\mathbb{R}^2$ gerado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e o subespaço S_2 de $\mathbb{R}^3$ gerado por $\mathbf{w}$.
   b) Mostre que a imagem e o núcleo de $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ são, respetivamente, S_1 e S_2,
   sendo a matriz de transformação linear, relativamente às bases canónicas, dada por $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$. Indique as respetivas dimensões.

18. Seja a transformação linear f de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y) = (x, y, x+y)$. Determine a matriz de$f$ relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

19. Considere a seguinte transformação linear de $\mathbb{R}^4$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x,y,z,t) = x+y-t$ e calcule
   a) a matriz de transformação $\mathbf{A}_f$.
   b) $\mathrm{Im}(f)$ e c_f.

20. Considere a aplicação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (0, x+y)$. Mostre que se trata de uma transformação linear e determine a matriz $\mathbf{A}_T$.

21. Seja a transformação linear $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(1,0) = (1,0,0)$ e $f(0,1) = (2,1,-1)$ e determine
   a) $\mathbf{A}_f$.
   b) $f(x,y)$ e $f(1,3)$.

22. Encontre os valores próprios das matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 19 & -2 & 0 \\ 19 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

23. Determine os valores próprios e um subespaço próprio da matriz
   a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

24. Determine a e b de modo que $(1;1)$ e $(1;0)$ sejam vetores próprios da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$.

25. Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada de ordem 2 tal que $\text{tr}(\mathbf{A}) = 8$ e $\det(\mathbf{A}) = 12$. Determine o espetro de $\mathbf{A}$.

26. Determine a matriz $\mathbf{A}$ sabendo que $\text{tr}(\mathbf{A}) = 2$, $\det(\mathbf{A}) = 0$, $(1;0)$ e $(1;2)$ são vetores próprios de $\mathbf{A}$, $(1;0)$ é o vetor próprio associado ao valor próprio de menor valor absoluto e que $\mathbf{A}$ admite dois valores próprios distintos.

27. Seja T uma transformação linear, $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuja matriz relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$ é $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$. Determine

a) a lei da aplicação.

b) o núcleo de T.

c) a dimensão de $\text{Im}(T)$

d) se $(1,1,1)$ é um vetor próprio de T

e) os valores próprios de T

28. Considere a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ e determine

a) $|\mathbf{A} - 2\mathbf{I}|$. Que pode concluir?

b) os vetores próprios associados ao valor próprio 2.

c) todos os valores próprios de $\mathbf{A}$.

4.9. Soluções dos exercícios propostos

4.9.1. Exercícios relativos a espaços vetoriais

1. Sim
2. Não
3. a) Sim b) Sim c) Não
4. a) Sim b) Não c) Não d) Não e) Não
5. a) Sim b) Não c) Não d) Não e) Não
   f) Não g) Não h) Não i) Não

6. a) Não b) Sim
7. a) Sim b) Sim
8. a) Sim b) Não c) Não d) Sim
9. Não
10. $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$
11. $\mathbf{p}_3 = -3\mathbf{p}_1 + 4\mathbf{p}_2$
12.
    a) $\mathbf{v}_3 = \frac{11}{4}\mathbf{v}_1 + \frac{3}{4}\mathbf{v}_2$
    b) $\mathbf{v}_4 = (0, a)\,,\ a \in \mathbb{R}$
13.
    a)
    b) $\mathbf{v}_4 = (0, 0, 0)$
    c) $\mathbf{v}_5 = (2a, 0, a)\,,\ a \in \mathbb{R}$
14.
    a) Por exemplo, $\mathbf{o} = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = 4\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$
    b) Sim, $\mathbf{o} = 0\mathbf{v}_3 + 0\mathbf{v}_4$
15.
16. Não
17.
18.
19. $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ 2\mathrm{x} + \mathrm{y} - \mathrm{z} = 0\}$
20. $c = 2 \ \wedge\ d = 0$
21.
    a) $c \neq 9$
    b) $\mathbf{v}_4 = \frac{-3}{2}\mathbf{v}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 + \frac{1}{4}\mathbf{v}_3$
    c) $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ \mathrm{x} + 2\mathrm{y} - \mathrm{z} = 0\}$
22.
    a) Sim
    b) $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2$
    c) Qualquer vetor que seja combinação linear de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, por exemplo, $\mathbf{v}_4 = (1, 4, 4)$
    d) $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \colon\ 8\mathrm{a} + \mathrm{b} - 3\mathrm{c} = 0\}$
23.
    a) Vetores linearmente independentes
    b) Vetores linearmente dependentes
    c) Vetores linearmente independentes
    d) Vetores linearmente dependentes

e) Vetores linearmente independentes

f) Se $a \neq 1 \wedge a \neq -2$ vetores linearmente independentes, se $a = 1 \vee a = -2$ vetores linearmente dependentes

g) Vetores linearmente independentes

h) Vetores linearmente dependentes

24.

a) Sim

b) Sim

c) $\langle \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3 \rangle = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 1}\colon \ \mathrm{a} = \mathrm{c} \right\}$

25. a) b) Não

26.

a) $a \neq 3 \ \vee \ b \neq 1$

b) $a = 3 \ \wedge \ b = 1$

c) $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_3$

27. Não

28. a) Não b) 2

29. Qualquer vetor (a, b, c) que verifique a condição $b + c \neq 0$ por exemplo, $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1)$

30.

a) Sim

b) $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3\colon \ \mathrm{c} = 2\mathrm{a}\}$

31.

a) $\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4\colon \ 2\mathrm{a} - \mathrm{b} + \mathrm{c} = 0 \ \wedge \ \mathrm{a} - \mathrm{b} + \mathrm{d} = 0\}$

b) 2

c) Por exemplo, $\{(1, 1, -1, 0)\,; (0, 1, 1, 1)\}$

d) $(1, 0, -2, -1) = (1, -1)_{\{(1,1,-1,0);(0,1,1,1)\}}$

32.

a) $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3\colon \ \mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c} = 0\}$

b) 2

c) Por exemplo, $B = \{(1, 0, -1)\,; (0, 1, -1)\}$

d) $\mathbf{v}_5 = (1, -1)_B\,;\ \mathbf{v}_6 = (1, 1)_B$

33. a) Sim b) Sim

34.

a) Sim

b) Base de $\mathbf{A} = \{(2, 1, 0)\,,\ (-1, 0, 1)\}$. Base de $\mathbf{B} = \{(0, 2, 1)\,,\ (1, 0, 0)\}$

c) 2

d) $\{(0,2,1),(1,2,1),(1,0,0)\}$ são geradores de $\mathbf{B}$, mas não formam uma base de $\mathbf{B}$, pois são linearmente dependentes.

35. $\{(19,8,0,1),(-13,-5,1,0)\}$
36. Sim
37. Sim
38. Sim
39. Sim
40.

a) $\langle \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3 \rangle = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 1}:\ \mathrm{a}+\mathrm{c}=0 \right\}$

b) 2

c) Por exemplo, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ e $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

41.
42.
43. $\left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \\ -2a & a+b \end{bmatrix},\ a,b \in \mathbb{R} \right\}$
44. $\mathbf{w} = \left(-\frac{4}{5}, \frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right)_U$
45.

a) $\begin{bmatrix} \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{5}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

c) $p_4(x) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{13}{8}, \frac{3}{4}\right)_B$

46. Por exemplo, $\{(1,-2,0,1),(0,1,1,-1)\}$e $\{(1,0,2,-1),(0,2,2-2)\}$
47.

a) $\mathbf{w}_E = (-2,-1)_E$

b) $\mathbf{t}_V = (-3,\ 2)_V$

48. $\mathbf{w}_U = (-6,\ 15)_U$
49. $(\mathbf{v}_4)_V = (-6,\ 3,\ -2)_V$
50. $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3$

4.9.2. Exercícios relativos a transformações lineares

1.

a) Sim b) Não c) Não d) Não e) Não f) Não
g) Sim h) Não i) Sim j) Sim k) Não l) Não
m) Não

2.

a) $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$, $N(T) = \{(0,0)\}$
b) $\mathrm{Im}(T) = \{(x,y,0),\ x,y \in \mathbb{R}\}$, $N(T) = \{(0,0,z),\ z \in \mathbb{R}\}$
c) $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$, $N(T) = \{(0,0)\}$
d) $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^3$, $N(T) = \{(0,0,0)\}$
e) $\mathrm{Im}(T) = \{(a,0,c),\ a,c \in \mathbb{R}\}$, $N(T) = \{(-2y,y,-2y),\ y \in \mathbb{R}\}$
f) $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$, $N(T) = \{(0,0)\}$
g) $\mathrm{Im}(T) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3:\ a - 2b + c = 0\}$, $N(T) = \{(0,0)\}$
h) $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^3$, $N(T) = \{(0,0,0)\}$
i) $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$, $N(T) = \left\{\left(x, \frac{9}{8}x, \frac{1}{4}x\right),\ x \in \mathbb{R}\right\}$

3.

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -10 & 13 \\ -7 & 7 \end{bmatrix}$
d) $(-5,2)$ e) $(-11,-8)$ f) $\left(\frac{1}{3}, -\frac{10}{3}\right)$

4.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ c) $(-4,8)$
d) $(-16,12)$ e) $(4+z, -3-2z, z),\ z \in \mathbb{R}$

5.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 1 \\ -8 & -14 \end{bmatrix}$ c) $(-2,2,-13)$
d) $(2,4,-17)$ e) $(1,1)$

6.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \frac{7}{4} & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{7}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{-9}{2} \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & -4 \end{bmatrix}$
d) $(-4,4,-6)$ e) $(4,8,-14)$ f) $\left(\frac{5}{3}, \frac{-5}{6}, \frac{3}{2}\right)$

7. Por exemplo, $T(x,y,z) = (x - y, 2x, 3y)$

8.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ c) $T(x,y,z) = (x + 2y, x + y, 2x - y)$

9. $\left(-1, \frac{5}{2}\right)$
10. $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^2$, $\text{N}(T) = \{(z, -2z, z),\ z \in \mathbb{R}\}$
11. $\lambda(T) = \{0, 3\}$:
    vetor próprio associado ao valor próprio $\lambda = 0$: $(1, 1)$;
    vetor próprio associado ao valor próprio $\lambda = 3$, $(1, -2)$;
    a matriz é diagonalizável.
12.
    a)
    b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix}$
    c) $p_4(x) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)_Q$
    d) $\lambda(T) = \{1, 2\}$:
    vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda = 1$: $\{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$;
    vetor próprio associado ao valor próprio $\lambda = 2$, $(0, 1, 1)$;
    e) A matriz é diagonalizável.
13.
    a) $(2, -1, -5, 16)$
    b) $\lambda(T) = \{1\}$;
    vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda = 1$: $\{(0, 0, 0, 1)\}$;
    c) A matriz não é diagonalizável.
14.
    a) $\text{N}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \wedge y - z = 0\}$; base de $\text{N}(f) = \{(0, 1, 1)\}$.
    b) Base de $\text{Im}(f) = \{(0, 0, 2), (-1, 1, 1)\}$.
    c) $f(x, y, z) = (-y + z, y - z, 2x + y - z)$.
15.
    a) $(3, 7, 9)$.
    b) $n_T = 0$, $\text{N}(T) = \{(0, 0, 0)\}$.
    c) $c_T = 3$, $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^3$, base de $\text{Im}(f) = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$
16.
    a)
    b) $n_T = 0$, base de $\text{N}(T) = \{\}$; $c_T = 3$, base de $\text{Im}(T) = \{\}$.
17.
    a) $S_1 = \{\}$; $S_2 = \{\}$
    b)
18. $\text{A}_T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

19. a) $A_T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $c_T = 1$, $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}$

20. $\mathbf{A}_T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

21.

a) $A_T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

b) $f(x,y) = (x+2y, y, -y)$, $f(1,3) = (7,3,-3)$

22. $\lambda(A) = \{3,-1\}$, $\lambda(B) = \{1,2,-1\}$,$\lambda(C) = \{-4, -2 \pm \sqrt{19}\}$.

23.

a) Valores próprios $\{-1,3\}$;
vetores próprios associados a $\lambda = -1$, $\{(0,1,0)\}$;
vetores próprios associados a $\lambda = 3$, $\{(-4,1,4)\}$.

b) Valores próprios $\{2\}$;
vetores próprios associados a $\lambda = 2$.

c) Valores próprios $\{1,0,-1\}$;
vetores próprios associados a $\lambda = 1$, $\{(0,0,1)\}$;
vetores próprios associados a $\lambda = 0$, $\{(10,-1)\}$;
vetores próprios associados a $\lambda = -1$, $\{(-2,1,1)\}$.

24. $a = 0$ e $b = 2$.

25. $\lambda(A) = \{2;6\}$.

26. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

27. $T(x,y,z) = (2x+y+z, 2x+3y+4z, -x-y-2z)$,
$\mathrm{N}(T) = \{(0,0,0)\}$, $c_T = 3$; Não; $\lambda(A) = \{\pm 1, 3\}$.

28. $(1,0,0)$; $(0,1,1)$; $\{2,4\}$.

CAPÍTULO

5

Geometria Analítica

Muitas grandezas físicas, como velocidade, força, deslocamento e impulso, para serem completamente identificadas, precisam, para além da sua magnitude, da sua direção e do seu sentido. Estas grandezas são chamadas grandezas vetoriais ou, simplesmente, vetores.

Para representar geometricamente um vetor, utiliza-se um segmento de reta orientado, onde o comprimento do vetor corresponde ao módulo, a direção da linha suporte do segmento à direção do vetor e a orientação do segmento de reta corresponde ao sentido do vetor.

Neste capítulo tratar-se-á apenas de vetores do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e utilizar-se-á a seguinte notação

- Letras maiúsculas para representar pontos $(A, B, C, \ldots)$.
- Letras minúsculas para representar retas $(a, b, c, \ldots, r, s, t, \ldots)$.
- Letras minúsculas gregas para representar planos $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$.
- Letras minúsculas com seta para representar vetores $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots, \vec{u}, \vec{v}, \ldots)$.

5.1. Referenciais cartesianos e espaço afim

No estudo do cálculo vetorial surge, frequentemente, a necessidade da representação de vetores num referencial a $n \leq 3$ dimensões, que, não menos vezes, é catalogado em diferentes tipos, sendo necessário atender às seguintes definições:

Definição 162. Referencial

Chama-se *referencial* a um sistema de eixos coordenados.

Definição 163. Referencial monométrico

Chama-se *referencial monométrico* a um referencial em que a unidade de medida é a mesma para todos os seus eixos.

Definição 164. Referencial ortogonal

Chama-se *referencial ortogonal* a um referencial com os eixos perpendiculares entre si.

Definição 165. Referencial ortonormado

Chama-se *referencial ortonormado* a um referencial que é, simultaneamente, ortogonal e monométrico.

Definição 166. Referencial cartesiano

Chama-se *referencial cartesiano em* $\mathbb{R}^3$ ao referencial ortonormado caracterizado por três eixos coordenados: um eixo das abcissas (eixo OX), um eixo das ordenadas (eixo OY) e um eixo das cotas (eixo OZ). Os três eixos definem três planos perpendiculares entre si (ditos planos coordenados): XOY, YOZ, ZOX.

Neste referencial, os vetores unitários dos eixos dos XX, dos YY e dos ZZ têm a direção dos respetivos eixos, o sentido de cada eixo corresponde ao sentido do semi-eixo positivo e representam-se, respetivamente, pelos símbolos $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ (ou $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ e $\vec{u}_z$ ou, ainda, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$, entre outras).

Definição 167. Espaço afim

Considere-se o espaço vetorial V e $\varepsilon = \{A, B, C, \ldots\}$ um conjunto não vazio. Obtém-se a estrutura de *espaço afim* associado ao espaço vetorial V, fixando uma aplicação de $\varepsilon \times \varepsilon$ em V, que a cada par ordenado de $\varepsilon \times \varepsilon$ faça corresponder um elemento de V. Chamam-se *pontos* aos elementos de ε e *vetores* aos de V. Neste contexto, se ε é um espaço afim associado ao espaço vetorial V, o referencial corresponde a um par ordenado $(O,\ B)$ em que $O \in \varepsilon$ é a origem e B é uma base de V.

Seja $\left(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ uma base ortonormada direta de $\mathbb{R}^3$, $\left(0,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ o referencial cartesiano e $P_1\,(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $P_2\,(x_2,\ y_2\ z_2)$ e $P_3\,(x_3,\ y_3,\ z_3)$ três pontos. Assim, define-se

1. A origem por $O(0,0,0)$.
2. O ponto genérico por $P\,(x,y,z)$.
3. O vetor $\overrightarrow{OP}$ por $\overrightarrow{OP} = (x,y,z) - (0,0,0) = (x,y,z) = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$.
4. O vetor $\vec{u}$, formado por dois pontos, P_1 e P_2, por
   $\vec{u} = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y - y_1, z_2 - z_1) = (u_x, u_y, u_z) = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$.
5. O ponto médio do segmento de reta definido pelos pontos, P_1 e P_2 é o ponto $P_M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2},\ \frac{z_1+z_2}{2}\right)$.
6. $\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{0}$ sse $P_1 = P_2$.
7. $\overrightarrow{P_1P_2} = -\overrightarrow{P_2P_1}$.
8. $\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} = \overrightarrow{P_1P_3}$.

Definição 168. Igualdade de dois vetores
Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, com coordenadas cartesianas $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ e $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, respetivamente, dizem-se iguais se, e só se,

$$u_x = v_x \wedge u_y = v_y \wedge u_z = v_z \tag{5.1}$$

Geometricamente, vetores são representados por segmentos de retas orientados no plano ou no espaço. Um segmento orientado é determinado por dois pontos, o primeiro chama-se *ponto inicial* ou *origem do segmento orientado* e o segundo chama-se *ponto final* ou *extremidade do vetor*. O segmento orientado de origem em A e extremidade em B é representado por $\overrightarrow{AB}$ e, geometricamente, indicado por uma seta que carateriza visualmente o sentido do segmento.

1. Fixada uma unidade de comprimento, a cada segmento orientado pode associar-se um número real, não negativo, que é a medida do segmento em relação à unidade fixada. O comprimento do segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ representa-se por $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ ou por $|\overrightarrow{AB}|$. Segmentos orientados com a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento representam o mesmo vetor. A direção, o sentido e o comprimento do vetor são definidos como sendo a direção, o sentido e o comprimento de qualquer um dos segmentos orientados que o representam.
2. Se $\overrightarrow{AB}$ é um segmento orientado, $\overrightarrow{BA}$ é o segmento orientado com a mesma direção e o mesmo comprimento, mas com sentido oposto ao primeiro.

Definição 169. Vetores colineares
Dois vetores dizem-se *colineares* se tiverem a mesma direção, isto é, se pertencem a uma mesma reta ou a retas paralelas.

Definição 170. Vetores complanares
Três vetores dizem-se *complanares* se possuírem representantes pertencentes a um mesmo plano.

O vetor $\vec{u} = \overrightarrow{OP} = (u_x, y_y, u_z)$ pode ser decomposto na soma de três vetores: $\overrightarrow{OP} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$, onde $u_x\vec{i}$, $u_y\vec{j}$ e $u_z\vec{k}$ traduzem as projeções do vetor $\overrightarrow{OP}$, respetivamente sobre os eixos dos XX, dos YY e dos ZZ.

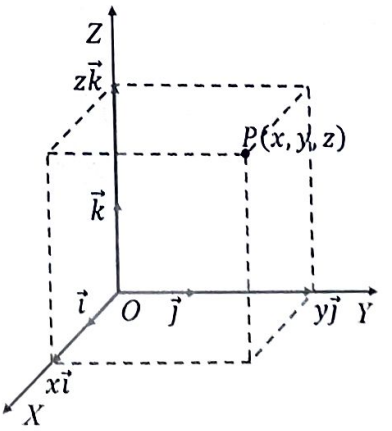


Figura 5.1.: Representação de um ponto $P(x, y, z)$ num referencial cartesiano de $\mathbb{R}^3$.

5.2. Operações algébricas com vetores de $\mathbb{R}^3$

Definição 171. Operações algébricas com vetores

As operações algébricas elementares com vetores - soma de vetores, diferença de vetores e produto de um real por um vetor - seguem as definições e propriedades anteriormente apresentadas no capítulo 2, Cálculo Matricial. De notar, contudo, que o conceito de vetor no espaço tridimensional é distinto do conceito abordado no capítulo 4, Espaços Vetoriais e Transformações Lineares.

$$\begin{aligned} \vec{s} = \vec{u} + \vec{v} &= (s_x, s_y, s_z) \\ &= (u_x + v_x)\,\vec{i} + (u_y + v_y)\,\vec{j} + (u_z + v_z)\,\vec{k} \end{aligned} \tag{5.2}$$

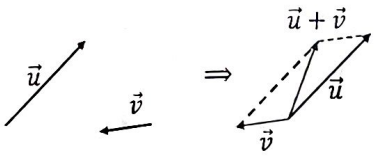


Figura 5.2.: Soma de dois vetores.

$$\begin{aligned} \vec{d} = \vec{u} - \vec{v} &= (d_x, d_y, d_z) \\ &= (u_x - v_x)\,\vec{i} + (u_y - v_y)\,\vec{j} + (u_z - v_z)\,\vec{k} \end{aligned} \tag{5.3}$$

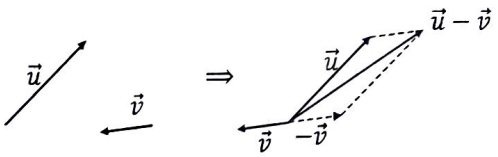


Figura 5.3.: Subtração de vetores

Definição 172. Multiplicação de um vetor por um escalar

A multiplicação de um vetor $\vec{v}$ por um escalar k, é determinada pelo vetor:

$$\begin{aligned} \vec{w} = k\vec{v} &= k(w_x, w_y, w_z) \\ &= (kw_x)\,\vec{i} + (kw_y)\,\vec{j} + (kw_z)\,\vec{k} \end{aligned} \tag{5.4}$$

e possui as seguintes caraterísticas

- Se $k = 0$, então $k\vec{v} = \vec{0}$.
- Se $k \neq 0$, então $k\vec{v}$ tem
  - $|k|$ vezes o comprimento de $\vec{v}$.
  - A mesma direção de $\vec{v}$.
  - O mesmo sentido de $\vec{v}$, se $k > 0$, sentido contrário de $k < 0$.

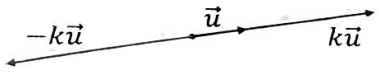


Figura 5.4.: Multiplicação de um vetor por um escalar.

5.3. Produto interno (ou escalar)

Definição 173. Norma (ou módulo) de um vetor

Chama-se *norma* (módulo ou comprimento) de um vetor $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$, e representa-se por $||\vec{u}||$, ao escalar obtido pela seguinte expressão cartesiana

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(u_x)^2 + (u_y)^2 + (u_z)^2} \tag{5.5}$$

Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ vetores de $\mathbb{R}^3$ e k um número real. A norma de $\vec{u}$ representa o comprimento do vetor e verifica as propriedades listadas na tabela 5.1.

Tabela 5.1.: Propriedades da norma.

	Propriedade
P1	$\|k\vec{u}\| = \|k\| \ \|\vec{u}\| \ , \forall \vec{u} \in V, \forall k \in \mathbb{R}$
P2	$\|\vec{u}\| \geq 0 \ , \quad \forall \vec{u} \in V$
P3	$\|\vec{u}\| = 0$ sse $\vec{u} = \vec{o}$
P4	$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ | (desigualdade triangular)

Exemplo 131.

A norma do vetor (1,2,-1) em $\mathbb{R}^3$ é dada por:

$\|(1, 2, -1)\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$

Definição 174. Cossenos diretores de um vetor

Os cossenos diretores do vetor $\vec{u}$ relativamente à base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ são dados por

$$\cos(\alpha) = \frac{u_x}{\|\vec{u}\|}, \cos(\beta) = \frac{u_y}{\|\vec{u}\|}, \cos(\gamma) = \frac{u_z}{\|\vec{u}\|} \tag{5.6}$$

Definição 175. Versor de um vetor

O vetor unitário com a direção e o sentido do vetor $\vec{u}$ designa-se por versor de $\vec{u}$ e é dado por

$$\begin{aligned} \text{vers}\,(\vec{u}) &= \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \\ &= \frac{u_x}{\|\vec{u}\|}\vec{i} + \frac{u_y}{\|\vec{u}\|}\vec{j} + \frac{u_z}{\|\vec{u}\|}\vec{k} \\ &= \cos(\alpha)\,\vec{i} + \cos(\beta)\,\vec{j} + \cos(\gamma)\,\vec{k} \end{aligned} \tag{5.7}$$

Tem-se $\|\text{vers}\,(\vec{u})\| = 1$,isto é, $\sqrt{\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma)} = 1$, ou seja

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1 \tag{5.8}$$

Definição 176. Produto interno

Considere $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ uma base ortonormada direta de $\mathbb{R}^3$ e $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores $\mathbb{R}^3$, não nulos. Chama-se produto interno, ou escalar, de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ ao escalar representado por $\vec{u}.\vec{v}$ (ou $\vec{u}|\vec{v}$) obtido a partir de

$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}|\,\vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\theta) \tag{5.9}$$

Nesta expressão:

- θ representa o ângulo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$, tal que $0 \leq \theta \leq \pi$.
- $\|\vec{u}\| \cos(\theta)$ representa a componente do vetor $\vec{v}$ sobre um eixo orientado com o vetor $\vec{u}$, também dita de componente interna de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.
- $\|\vec{v}\| \cos(\theta)$ representa a componente do vetor $\vec{u}$ sobre um eixo orientado com o vetor $\vec{v}$, também dita de componente interna de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

Atendendo à definição de produto interno, $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0$ e $\vec{i}\cdot\vec{i} = j\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$. A aplicação da propriedade distributiva da multiplicação aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ escritos como combinação linar, $\vec{u} = u_x i + u_y j + u_z k$ e $\vec{v} = v_x i + v_y + v_z k$, produz a seguinte expressão cartesiana para o produto interno de vetores na base canónica de $\mathbb{R}^3$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z \tag{5.10}$$

Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vetores de $\mathbb{R}^3$ e k um número real. O produto interno entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ possui as seguintes propriedades

Tabela 5.2.: Propriedades do produto interno.

	Propriedade
P1	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
P2	$\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
P3	$(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$
P4	$\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$ se $\vec{u} \neq \vec{o}$
P5	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ se $\vec{u} \perp \vec{v}$ $\vee$ $\vec{u} = \vec{o}$ $\vee$ $\vec{v} = \vec{o}$
P6	$\|\vec{u} \cdot \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$ (desigualdade de Cauchy-Schwarz)

Exemplo 132.

O produto escalar entre os vetores $\vec{u} = (1, -1, 1)$ e $\vec{v} = (0, 2, 4)$ tem o valor
$(1, -1, 1) \cdot (0, 2, 4) = 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 2$

Definição 177. Espaço euclidiano

Chama-se *espaço euclidiano* a um espaço vetorial munido de um produto interno.

Definição 178. Ângulo entre dois vetores

O *ângulo* entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o menor ângulo formado pelos vetores, representa-se por $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$ e calcula-se através da relação

$$\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}\right) \tag{5.11}$$

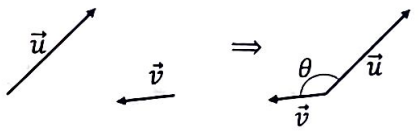


Figura 5.5.: Ângulo entre dois vetores.

Exemplo 133.

O ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1, 0, 2)$ e $\vec{v} = (0, 2, 1)$ é
$\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos\left(\frac{0+0+2}{\sqrt{1+0+4}\ \sqrt{0+4+1}}\right) = \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{60}}\right)$

Definição 179. Projeção de um vetor segundo uma determinada direção

A projeção de um vetor $\vec{u}$, segundo a direção do vetor $\vec{v}$ é dada por

$$\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \|\vec{u}\| \cos\theta \text{vers}\,(\vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} \tag{5.12}$$

onde $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$, tal como se indica na figura

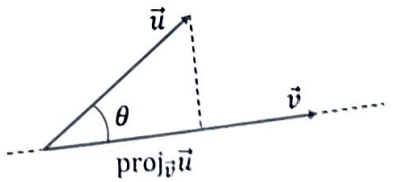


Figura 5.6.: Projeção de um vetor $\vec{u}$, segundo a direção de um vetor $\vec{v}$.

De igual modo se pode obter a projeção do vetor $\vec{v}$ sobre o vetor $\vec{u}$.

Definição 180. Vetores ortogonais e conjuntos ortonormais

Seja V um espaço euclidiano.

1. Dois vetores $\vec{u}, \vec{v} \in V$ dizem-se ortogonais se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ e, neste caso, denota-se por $\vec{u} \perp \vec{v}$.
2. Diz-se que $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \cdots, \vec{u_k})$ é uma sequência ortogonal de vetores se os vetores $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \cdots, \vec{u_k}$ são ortogonais dois a dois.
3. Um conjunto $S = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\} \subseteq V$ diz-se ortogonal se $\vec{u}_i \perp \vec{u}_j$ quando $i \neq j$.
4. Um conjunto ortogonal $S = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\} \subseteq V$ diz-se ortonormal se
$$\|\vec{u}_i\| = 1 \ , \quad i = 1, \ldots, n.$$
5. Se $\vec{u} \neq \vec{o}$ e $\vec{v} \neq \vec{o}$, então $\vec{u} \perp \vec{v}$ se, e somente se, o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{\pi}{2}$.

Exemplo 134.

O conjunto $S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$ é um conjunto ortonormal, pois

- Com relação ao produto escalar
$$(1,0,0) \cdot (0,0,1) = 0 + 0 + 0 = 0$$
$$(1,0,0) \cdot (0,1,0) = 0 + 0 + 0 = 0$$
$$(0,1,0) \cdot (0,0,1) = 0 + 0 + 0 = 0$$
Logo, S é ortogonal.
- Com relação ao comprimento de cada vetor
$$\|(1,0,0)\| = \sqrt{1+0+0} = 1$$
$$\|(0,1,0)\| = \sqrt{0+1+0} = 1$$
$$\|(0,0,1)\| = \sqrt{0+0+1} = 1$$
Logo, S é ortonormal.

Exemplo 135.

Seja $S = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}\} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right\} \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto ortonormal.

A projeção de $\vec{u} = (2,3,1) \in \mathbb{R}^3$ sobre S é dada por

$$\text{proj}_S \vec{u} = \frac{\vec{u}.\vec{u_1}}{\|\vec{u_1}\|^2}\vec{u_1} + \frac{\vec{u}.\vec{u_2}}{\|\vec{u_2}\|^2}\vec{u_2}$$

$$\|\vec{u_1}\|^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$
$$\|\vec{u_2}\|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1$$

$$\vec{u}.\vec{u_1} = (2,3,1) \mid \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{-3}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$$

$$\vec{u}.\vec{u_2} = (2,3,1) \mid \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} + 0 = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

Logo

$$\text{proj}_S \vec{u} = \frac{0}{1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\frac{5}{\sqrt{2}}}{1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0\right)$$

5.4. Produto externo (ou vetorial)

Definição 181. Produto externo (ou produto vetorial) de dois vetores não nulos Considere $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ uma base ortonormada direta de $\mathbb{R}^3$ e $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores $\mathbb{R}^3$, não nulos, e θ o ângulo por eles formado tal que $0 \leq \theta \leq \pi$. Chama-se produto de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ ao vetor $\vec{w}$, perpendicular ao plano definido pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, obtido através da seguinte expressão cartesiana

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \tag{5.13}$$

Observação 1. Por uma questão de simplicidade de cálculo, este determinante deverá ser calculado por aplicação do teorema de Laplace à 1ª linha.

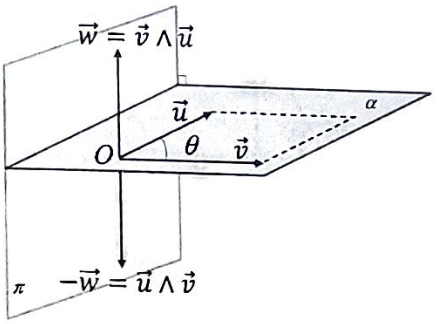


Figura 5.7.: Significado geométrico do produto externo de 2 vetores.

Sejam $\vec{u},\vec{v},\vec{t}$ vetores de $\mathbb{R}^3$ e k um número real. O produto externo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ possui as seguintes propriedades

Tabela 5.3.: Propriedades do produto externo.

	Propriedade
P1	$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
P2	$k(\vec{u} \wedge \vec{v}) = (k\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (k\vec{v})$, $\forall k \in \mathbb{R}$
P3	$(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{t} = \left(\vec{u} \wedge \vec{t}\right) + \left(\vec{v} \wedge \vec{t}\right)$
P4	$\vec{u} \wedge \left(\vec{v} + \vec{t}\right) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) + \left(\vec{u} \wedge \vec{t}\right)$
P5	o produto externo não é comutativo
P6	o produto externo não é associativo

Do produto externo de dois vetores ressaltam as seguintes consequências

1. $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{o}$ se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente dependentes, isto é, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dois vetores paralelos.
2. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente independentes, então
   - $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \perp \vec{u}$ e $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \perp \vec{v}$.
   - $\{\vec{u}, \vec{v}, (\vec{u} \wedge \vec{v})\}$ formam uma base.
3. $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| \sin\theta$, com $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$. O módulo do vetor $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ corresponde ao módulo do produto vetorial dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e é numericamente igual à área do paralelogramo construído sobre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
4. A altura do paralelogramo pode ser obtida através da relação $\|\vec{w}\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\| \sin(\theta) = \|\vec{v}\| h$, ou seja

$$h = \frac{\|\vec{w}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} \tag{5.14}$$

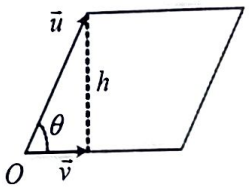


Figura 5.8.: Aplicação do produto externo no cálculo da altura de um paralelogramo.

5.5. Produto misto

Definição 182. Produto misto de três vetores não nulos

Considere $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ uma base ortonormada direta de $\mathbb{R}^3$ e $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores de $\mathbb{R}^3$, não nulos e θ o ângulo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$, tal que $0 \leq \theta \leq \pi$. Chama-se produto misto de três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ (por esta ordem) ao escalar obtido multiplicando o vetor $(\vec{u} \wedge \vec{v})$ pelo vetor $\vec{w}$ obtido por

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cos(\theta) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cos(\theta) \cdot \sin(\gamma)$$

ou pela seguinte expressão cartesiana

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

Geometricamente, o módulo do produto misto dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é igual ao volume do paralelepípedo de arestas determinadas por estes três vetores, uma vez que $|\vec{u} \wedge \vec{v}|$ corresponde à área da base do paralelogramo e o valor absoluto de $\|\vec{w}\| \cdot \cos(\theta)$ corresponde à altura do paralelogramo.

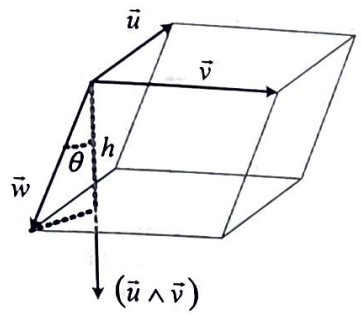


Figura 5.9.: Produto misto de três vetores.

Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vetores de $\mathbb{R}^3$ e k um número real. O produto misto entre os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ possui as seguintes propriedades

Tabela 5.4.: Propriedades do produto externo.

	Propriedade
P1	$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$ sse $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são linearmente dependentes
P2	$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} > 0$ sse $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma base direta de $\mathbb{R}^3$
P3	$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} < 0$ sse $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma base inversa de $\mathbb{R}^3$
P4	$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{w} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v} = (\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{u}$
P5	$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = -(\vec{v} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{w} = -(\vec{u} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{v}$
P6	$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$

Como consequência, para 3 vetores serem complanares é necessário e suficiente que o respetivo produto misto seja nulo - *condição de complanaridade.*

Exemplo 136.

Considere $\vec{u} = (-1, 1, 2)$, $\vec{v} = (0, -1, 2)$ e $\vec{w} = (2, -1, -3) \in \mathbb{R}^3$ e determine $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$.

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = (4, 2, 1) \cdot (2, -1, -3) = 8 - 2 - 3 = 3$

- $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 0 + 4 + 4 - 2 - 0 = 3$

5.6. Equações da reta

Teorema 27. *Sejam os pontos* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *e* $P_2(x_2, y_2, z_2)$ *e o vetor* $\vec{u}$ *por eles formado* $\vec{u} = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y - y_1, z_2 - z_1) = (u_x, u_y, u_z)$. *Se o vetor* $\vec{u}$ *é um vetor não nulo, então existe uma única reta que contém esses pontos e que tem a direção de* $\vec{u}$.

Uma reta pode ser definida por dois pontos ou por um ponto e um vetor.

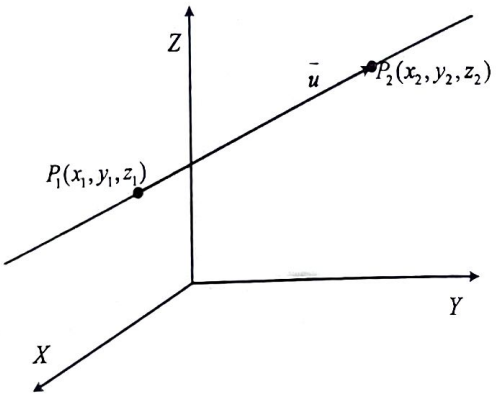


Figura 5.10.: Representação da reta no espaço.

Este teorema garante que por dois pontos passa uma e uma só reta que os contém, e permite definir a reta a partir da condição de colinearidade de vetores, isto é, se $P_1(x_1, y_1, z_1)$ é um ponto da reta r com a direção do vetor $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$, então qualquer ponto da reta forma com o ponto $P(x, y, z)$ um vetor colinear com o vetor $\vec{u}$, cuja condição é

$$\overrightarrow{P_1P} = k\vec{u},\ \forall k \in \mathbb{R} \tag{5.15}$$

e que pode ser reescrita na forma

$$P = P_1 + k\vec{u},\ \forall k \in \mathbb{R} \tag{5.16}$$

ou seja

$$r:\ (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + k\,(u_x, u_y, u_z)\,,\ \forall k \in \mathbb{R} \tag{5.17}$$

Esta equação é designada por *equação vetorial da reta.* A partir desta equação é possível definir as formas paramétrica e cartesiana.

Reescrevendo a equação 5.17, obtém-se a representação das *equações paramétricas da reta*

$$r:\ \begin{cases} x = x_1 + k\,u_x \\ y = y_1 + k\,u_y \\ z = z_1 + k\,u_z \end{cases} ,\forall k \in \mathbb{R} \tag{5.18}$$

Resolvendo o sistema de equações paramétricas da reta em ordem ao parâmetro k, e supondo que nenhuma coordenada do vetor $\vec{u}$ seja nula, tem-se

$$r: \begin{cases} k = \frac{x-x_1}{u_x} \\ k = \frac{y-y_1}{u_y} \\ k = \frac{z-z_1}{u_z} \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

cuja solução dá origem a uma representação designada de *equações cartesianas da reta* e que se apresenta com a seguinte forma:

$$r: \frac{x-x_1}{u_x} = \frac{y-y_1}{u_y} = \frac{z-z_1}{u_z} \tag{5.19}$$

Se alguma coordenada do vetor $\vec{u}$ é nula, seja, por exemplo, $u_z = 0$, *as equações cartesianas da reta* têm a seguinte forma:

$$r: \frac{x-x_1}{u_x} = \frac{y-y_1}{u_y};\ z = z_1 \tag{5.20}$$

Nenhuma das representações anteriores está univocamente determinada, isto é, podem-se ter inúmeras equações vetoriais, paramétricas e cartesianas para uma mesma reta. A expressão 5.19 para as equações cartesianas da reta poderá também ser traduzida num sistema de 2 equações, ditas equações normais, do seguinte modo:

$$r: \begin{cases} y = m_1 x + b_1 \\ z = m_2 x + b_2 \end{cases} \tag{5.21}$$

Exemplo 137.

Dados os pontos $A(1,1,0)$ e $B(0,1,1)$ para determinar as equações vetorial, paramétrica e cartesiana da reta r que contém estes dois pontos, começa-se por determinar o vetor definido pelos dois pontos

$$\vec{u} = B - A = (0,1,1) - (1,1,0) = (-1,0,1)$$

A equação vetorial da reta é dada por

$$r: (x,y,z) = (1,1,0) + k\,(-1,\,0,\,1) \quad ,\forall k \in \mathbb{R}$$

As equações paramétricas da reta são dadas por

$$r: \begin{cases} x = 1-k \\ y = 1 \\ z = 0+k \end{cases} \quad ,\forall k \in \mathbb{R}$$

As equações cartesianas da reta são dadas por

$$r: \begin{cases} \frac{x-1}{-1} = \frac{z}{1} \\ y = 1 \end{cases}$$

5.7. Equações do plano

Definição 183. Pontos colineares
Um conjunto de pontos dizem-se *pontos colineares* se pertencerem à mesma reta.

Teorema 28. *Sejam os pontos não colineares* $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ *e* $P_3(x_3, y_3, z_3)$; *considere ainda o vetor* $\vec{u} = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (u_x, u_y, u_z)$ *e o vetor* $\vec{v} = P_3 - P_1 = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1) = (v_z, v_y, v_z)$. *Se os vetores* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *não são paralelos, então existe um único plano que contém os três pontos (e os dois vetores).*

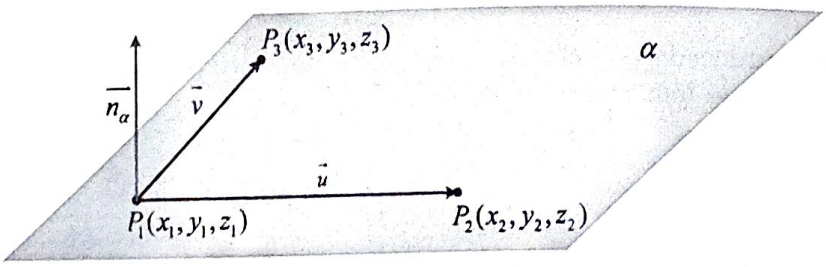


Figura 5.11.: Conceito de plano no espaço tridimensional.

Um plano em $\mathbb{R}^3$ pode ser definido através de

- Três pontos não colineares.
- Um ponto e uma reta que não o contenha.
- Duas retas paralelas mas não coincidentes.
- Duas retas concorrentes.

A forma mais simples de definir um plano, π, é através da sua *equação vetorial.* O vetor formado pelos pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e por um ponto genérico do plano, $P(x, y, z)$, pode ser definido como combinação linear dos vetores $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ e $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ definidos por P_1 e mais dois pontos do plano, como enunciado no teorema anterior

$$\overrightarrow{P_1P} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v} \quad , \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R} \tag{5.22}$$

Reescrevendo esta equação, ter-se-á

$$P = P_1 + k_1\vec{u} + k_2\vec{v} \quad , \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R} \tag{5.23}$$

A equação 5.23 também pode ser escrita em função das coordenadas dos elementos que definem o plano, resultando em

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + k_1(u_x, u_y, u_z) + k_2(v_x, v_y, v_z) \quad , \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R} \tag{5.24}$$

ou seja

$$(x, y, z) = (x_1 + k_1 u_x + k_2 v_x, y_1 + k_1 u_y + k_2 v_y, z_1 + k_1 u_z + k_2 v_z) \quad , \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R} \tag{5.25}$$

De modo análogo ao estudo feito para a reta, também para o plano é possível obter equações cartesianas partindo da equação vetorial. Assim, reescrevendo 5.25 , é possível obter uma nova representação, designada por *equações paramétricas do plano*

$$\pi : \begin{cases} x = x_1 + k_1 u_x + k_2 v_x \\ y = y_1 + k_1 u_y + k_2 v_y \\ z = z_1 + k_1 u_z + k_2 v_z \end{cases} \quad , \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R} \tag{5.26}$$

Esta equação pode ser reescrita na forma

$$\pi : \begin{cases} k_1 u_x + k_2 v_x = x - x_1 \\ k_1 u_y + k_2 v_y = y - y_1 \\ k_1 u_z + k_2 v_z = z - z_1 \end{cases} \quad , \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R} \tag{5.27}$$

a qual evidencia uma fácil resolução matricial do sistema formado por três equações a duas incógnitas, k_1 e k_2, cuja matriz completa é

$$\overline{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{cc|c} u_x & v_x & x - x_1 \\ u_y & v_y & y - y_1 \\ u_z & v_z & z - z_1 \end{array}\right] \tag{5.28}$$

Representando este sistema um plano, tem de ser possível a sua resolução, pelo que $\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}(\bar{\mathbf{A}})$. Neste contexto, sendo $\max\{\text{car}(\bar{\mathbf{A}})\} = 2$, a representação da equação cartesiana do plano pode ser alcançada impondo a condição de $\det(\bar{\mathbf{A}}) = 0$, isto é,

$$\pi : \begin{vmatrix} u_x & v_x & x - x_1 \\ u_y & v_y & y - y_1 \\ u_z & v_z & z - z_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{5.29}$$

Aplicando as propriedades dos determinantes, ter-se-á a seguinte representação da *equação cartesiana do plano*

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = 0 \tag{5.30}$$

o que corresponde a impor que o produto misto dos vetores $\overrightarrow{P_1 P}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ seja nulo, isto é,

$$\overrightarrow{P_1 P} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0 \tag{5.31}$$

Aplicando o Teorema de Laplace à primeira linha do determinante da equação 5.30, ter-se-á a equação

$$(x-x_1)\underbrace{\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix}}_{A} - (y-y_1)\underbrace{\begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix}}_{-B} + (z-z_1)\underbrace{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}}_{C} = 0 \tag{5.32}$$

a qual, após cálculo dos três determinantes de 2ª ordem, resulta em

$$\pi : A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0 \tag{5.33}$$

que se designa por *equação cartesiana do plano*, simplificando esta equação tem-se

$$\pi : Ax + By + Cz + (-Ax_1 - By_1 - Cz_1) = 0$$

podendo o resultado final desta equação, designada por *equação geral do plano*, ser simplificado na forma

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0 \tag{5.34}$$

Nesta equação, o vetor $\overrightarrow{n_\pi} = (A, B, C)$ é ortogonal ao plano π e D corresponde à distância à origem.

5.7.1. Planos projetantes

Considerem-se as equações cartesianas da reta apresentadas em 5.19. Os planos π_1, π_2 e π_3 dizem-se *planos projetantes* (ou planos coordenados) se cada um projeta a reta num plano coordenado tal que:

- Se $x = x_1$,

  π reduz-se a um plano, dito plano projetante, que corresponde à reta perpendicular ao eixo dos xx representada por

  $\pi_1 : \frac{y-y_0}{u_y} = \frac{z-z_0}{u_z}$, $x = x_1$

- Se $y = y_1$,

  π reduz-se a um plano, dito plano projetante, que corresponde à reta perpendicular ao eixo dos yy representada por

  $\pi_2 : \frac{x-x_0}{x_y} = \frac{z-z_0}{u_z}$, $y = y_1$

- Se $z = z_1$,

  π reduz-se a um plano, dito plano projetante, que corresponde à reta perpendicular ao eixo dos zz representada por

  $\pi_3 : \frac{x-x_0}{u_x} = \frac{y-y_0}{u_y}$, $z = z_1$

5.7.2. Casos particulares da equação de um plano

Considere-se a equação geral do plano 5.34. Dependendo dos valores dos parâmetros A, B, C e D, o plano vai ter diferentes posições, relativas aos planos coordenados. A tabela 5.5 resume esses resultados.

Tabela 5.5.: Posição relativa do plano em função dos parâmetros A, B, C e D.

Valores	Posição relativa do plano
$D = 0$	plano que passa na origem do referencial
$A = 0$	plano paralelo ao eixo OX e perpendicular ao plano YOZ
$B = 0$	plano paralelo ao eixo OY e perpendicular ao plano XOZ
$C = 0$	plano paralelo ao eixo OZ e perpendicular ao plano XOY
$A = B = 0$	plano paralelo ao plano XOY
$A = C = 0$	plano paralelo ao plano XOZ
$B = C = 0$	plano paralelo ao plano YOZ
$Ax = D$	plano perpendicular ao eixo OX
$By = D$	plano perpendicular ao eixo OY
$Cz = D$	plano perpendicular ao eixo OZ
$Ax + By = D$	plano paralelo ao eixo OZ
$Ax + Cz = D$	plano paralelo ao eixo OY
$By + Cz = D$	plano paralelo ao eixo OX

Exemplo 138.

Considere os pontos $A(1,1,0)$, $B(0,1,1)$ e $C(1,0,1)$. Para encontrar o plano π que contém estes três pontos, é necessário definir dois vetores linearmente independentes:

$$\vec{u} = B - A = (0,1,1) - (1,1,0) = (-1,0,1)$$

e

$$\vec{v} = C - A = (1,0,1) - (1,1,0) = (0,-1,1)$$

Assim, o plano pretendido é dado por

$$\pi : \begin{array}{c|ccc} P - A & x-1 & y-1 & z \\ \vec{u} & -1 & 0 & 1 \\ \vec{v} & 0 & -1 & 1 \end{array} = 0$$

Aplicando o Teorema de Laplace, ter-se-á a equação

$$\pi : (x-1)\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}_{A} - (y-1)\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{B} + z\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}_{C} = 0$$

ou seja, a equação geral do plano π é

$$\pi : (x-1) + (y-1) + z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \pi : x + y + z - 2 = 0$$

5.8. Problemas de incidência relativos a retas e planos

A determinação de interseções de retas, de planos e de, simultaneamente, retas e planos é efetuada através da resolução de sistemas de equações lineares.

Para tal, consideram-se as equações cartesianas de cada um dos elementos que se pretende intersetar e, uma vez formulado o problema na forma de um sistema de equações lineares, efetua-se a condensação da matriz completa do sistema e analisa-se a sua característica. Assim, podem ocorrer as seguintes situações

Tabela 5.7.: Quadro resumo dos resultados que podem ocorrer em interseções de retas, de planos e de, simultaneamente, retas e planos.

Característica	Classificação	Resultado da interseção
$\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}(\overline{\mathbf{A}}) = 3$	SPD	um ponto
$\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}(\overline{\mathbf{A}}) = 2$	SP1xI	uma reta
$\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}(\overline{\mathbf{A}}) = 1$	SP2xI	um plano
$\text{car}(\mathbf{A}) \neq \text{car}(\overline{\mathbf{A}})$	SI	$\{\}$

As definições de produto interno (ou escalar) de dois vetores não nulos e de produto de um escalar por um vetor permitem tirar algumas conclusões acerca da posição relativa entre retas, entre planos e entre, simultaneamente, retas e planos. Assim:

1. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dois vetores não nulos e perpendiculares, então o ângulo entre eles é de $\frac{\pi}{2}$ e o seu produto interno é nulo, pelo que a equação dita condição de perpendicularidade entre dois vetores é dada por:

$$\begin{aligned} &\vec{u}.\vec{v} = 0 \\ &u_x u'_x + u_y u'_y + u_z u'_z = 0 \end{aligned} \tag{5.35}$$

2. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dois vetores não nulos e paralelos (isto é, com a mesma direção), então é possível determinar, aplicando a definição do produto de um escalar por um vetor, um e um só k real que satisfaça a equação dita condição de paralelismo entre dois vetores que é dada por:

$$\begin{aligned} &\vec{u} = k.\vec{v} \\ &\frac{u_x}{u'_x} = \frac{u_y}{u'_y} = \frac{u_z}{u'_z} = k \quad , \forall k \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{5.36}$$

5.8.1. Posição relativa de duas retas

Duas retas r e s dizem-se

1. **Complanares**, se existe um plano que as contém.
2. **Não complanares**, se não existe nenhum plano que as contém.

Duas retas complanares dizem-se

1. **Concorrentes**, se têm um e um só ponto em comum.

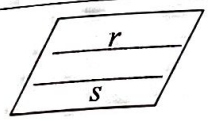
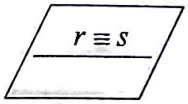
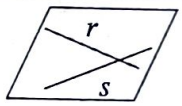
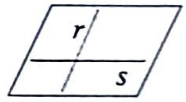
2. **Paralelas**, se têm a mesma direção, isto é, não têm nenhum ponto em comum.
3. **Coincidentes**, se têm todos os pontos em comum.

Duas retas concorrentes dizem-se

1. **Oblíquas**, se o ângulo θ por elas formado é $0 < \theta < \pi/2$.
2. **Ortogonais** (ou perpendiculares), se o ângulo θ por elas formado é $\theta = \pi/2$.

A posição relativa de duas retas complanares r e s é resumida na tabela 5.9.

Tabela 5.9.: Posição relativa de duas retas complanares.

Paralelas		Concorrentes	
Distintas	Coincidentes	Oblíquas	Perpendiculares
			
$\text{car}(\mathbf{A}) \neq \text{car}(\overline{\mathbf{A}})$	$\text{car}(\mathbf{A}) = 2$	$\text{car}(\mathbf{A}) = 3$	$\text{car}(\mathbf{A}) = 3$
	$\text{car}(\overline{\mathbf{A}}) = 2$	$\text{car}(\overline{\mathbf{A}}) = 3$	$\text{car}(\overline{\mathbf{A}}) = 3$
$r \cap s = \varnothing$	$r \cap s = r \equiv s$	$r \cap s = P_I$	$r \cap s = P_I$

Note-se que duas retas não complanares também podem ser ortogonais se o ângulo θ por elas formado é $\theta = \pi/2$.

A posição relativa de duas retas não complanares r e s é ilustrada na tabela 5.10.

Tabela 5.10.: Posição relativa de duas retas não complanares.

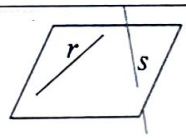
Enviesadas

$\text{car}(\mathbf{A}) \neq \text{car}(\overline{\mathbf{A}})$
$r \cap s = \varnothing$

Tabela 5.11.: Propriedades.

	Propriedade
P1	Duas retas paralelas a uma terceira são todas paralelas entre si
P2	Sejam duas retas paralelas. Todo o plano que interseta uma, interseta a outra
P3	Se duas retas são perpendiculares, toda a reta paralela a uma é perpendicular a outra
P4	Se duas retas são paralelas, toda a reta perpendicular a uma é perpendicular a outra

Exemplo 139.

Considere os pontos $A(1,1,0)$, $B(0,1,1)$ e $C(1,0,1)$, o vetor $\vec{u} = (0,-1,1)$, a reta r que passa em A e em B e a reta s que passa em C e tem a direção do vetor $\vec{u}$.

- Determine a posição relativa das retas r e s.

  $\overrightarrow{AB} = B - A = (0,1,1) - (1,1,0) = (-1,0,1)$,

  logo, a reta r tem as equações:

$$r: \quad (x,y,z) = (1,1,0) + k_1(-1,0,1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - k_1 \\ y = 1 \\ z = k_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

  A reta s tem as equações:

$$s: \quad (x,y,z) = (1,0,1) + k_2(0,-1,1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -k_2 \\ z = 1 + k_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

  Para determinar a posição relativa das duas retas, comece-se por determinar se têm algum ponto em comum

$$r \cap s = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]_{L_3 = L_3 - L_1} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]_{L_4 = L_4 - L_2} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]_{L_4 = L_4 + L_3} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

O sistema é possível e determinado, pelo que $r \cap s = P = (1,1,0)$. Logo, são retas concorrentes.

(continuação)

- Determinação de uma equação da reta s paralela a r que passa em C.

  Se a reta é paralela a r e passa em C, então tem as equações

$$s: \quad (x,y,z) = (1,0,1) + k_1(-1,0,1) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - k_1 \\ y = 0 \\ z = 1 + k_1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + z = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

- Determinação da posição relativa das retas r e t: $\begin{cases} x = 1 \\ y = -k_2 \\ z = 2 - k_2 \end{cases}$

  Para determinar a posição relativa das duas retas, comece-se por determinar se têm algum ponto em comum

$$r \cap t = \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 1 \\ x = 1 \\ -y + z = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \begin{matrix} \\ \\ \\ L_3 = L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 = L_4 + L_2 \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 = L_4 + L_3 \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

O sistema é impossível e, por isso, as retas não têm pontos em comum, ou são paralelas ou são não complanares.

Verifique-se se os vetores com direção das duas retas são paralelos:

$$\vec{r} \,||\, \vec{t} \;\; sse \;\; \exists^1 k \in \mathbb{R} \;:\; \vec{r} = k\vec{t}$$

Como $\vec{r} = (-1,0,1)$ e $\vec{t} = (0,-1,-1)$ não existe $k \in \mathbb{R} : \vec{r} = k\vec{t}$. Logo, as retas são não complanares, são enviesadas.

5.8.2. Posição relativa de uma reta e um plano

Uma reta r e um plano α dizem-se

1. **Paralelos**, se a reta está paralela ao plano ou nele contida.
2. **Concorrentes**, se a reta interseta, perpendicular ou obliquamente, o plano.

A posição relativa de uma reta e um plano está resumida na tabela 5.12.

Tabela 5.12.: Posição relativa de uma reta e um plano.

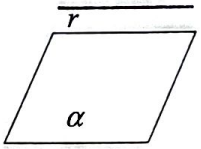
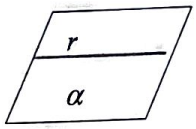
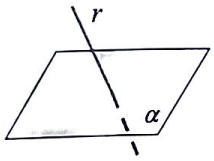
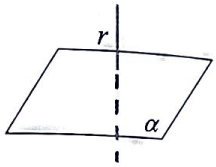
Retas e planos paralelos		**Retas e planos concorrentes**	
Reta e plano distintos	Reta contida no plano	Reta oblíqua	Reta perpendicular
			
$\text{car}(\mathbf{A}) \neq \text{car}(\overline{\mathbf{A}})$ $r \cap \alpha = \varnothing$	$\text{car}(\mathbf{A}) = 2$ $\text{car}(\overline{\mathbf{A}}) = 2$ $r \cap \alpha = r$	$\text{car}(\mathbf{A}) = 3$ $\text{car}(\overline{\mathbf{A}}) = 3$ $r \cap \alpha = P_I$	$\text{car}(\mathbf{A}) = 3$ $\text{car}(\overline{\mathbf{A}}) = 3$ $r \cap \alpha = P_I$

Tabela 5.13.: Propriedades.

	Propriedade
P1	Se num plano existir uma reta paralela a uma reta dada, que não está contida nesse plano, então a reta e o plano são paralelos.
P2	Se duas retas são não complanares., então existe um e um só plano que contém uma e é paralelo à outra.
P3	Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então a reta é perpendicular ao plano (critério de perpendicularidade entre reta e plano).
P4	Existe um só plano α perpendicular a uma reta r e a passar no ponto A, mas existem várias retas perpendiculares à reta r e a passar no ponto A.
P5	Existe uma só reta r perpendicular a um plano α e a passar no ponto A, mas existem vários planos perpendiculares ao plano α e a passar no ponto A.

5.8.3. Posição relativa de dois planos

Dois planos α e β dizem-se

1. **Paralelos**, se não possuírem pontos em comum e se qualquer uma reta pertencente ao plano α for paralela a uma reta pertencente ao plano β.
2. **Secantes** ou **Concorrentes**, quando a interseção entre eles for uma reta.
3. **Coincidentes**, se equivalem a um mesmo plano.

A posição relativa de dois planos está resumida na tabela 5.14.

Tabela 5.14.: Posição relativa de dois planos.

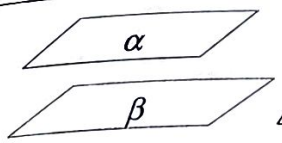
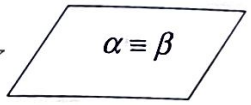
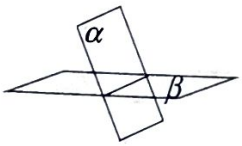
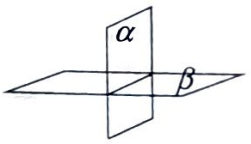
Planos paralelos		**Planos concorrentes**	
Distintos	Coincidentes	Oblíquos	Perpendiculares
			
$\text{car}(\mathbf{A}) \neq \text{car}(\overline{\mathbf{A}})$ $\alpha \cap \beta = \varnothing$	$\text{car}(\mathbf{A}) = 1$ $\text{car}(\overline{\mathbf{A}}) = 1$ $\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$	$\text{car}(\mathbf{A}) = 2$ $\text{car}(\overline{\mathbf{A}}) = 2$ $\alpha \cap \beta = r_I$	$\text{car}(\mathbf{A}) = 2$ $\text{car}(\overline{\mathbf{A}}) = 2$ $\alpha \cap \beta = r_I$

Tabela 5.15.: Propriedades.

	Propriedade
P1	Se duas retas concorrentes de um plano são paralelas a outro plano, então os planos são paralelos (critério de paralelismo entre planos).
P2	Existe um só plano que passa por um ponto dado e é paralelo a um plano dado.
P3	Se um plano interseta dois planos paralelos, as retas de interseção são paralelas.
P4	Se num plano existe uma reta perpendicular a outro plano, então os planos são perpendiculares (critério de perpendicularidade entre planos).

5.8.4. Posição relativa de três planos

As tabelas 5.16 e 5.17 resumem as situações que podem ocorrer quando se intersetam 3 planos.

Tabela 5.16.: Posição relativa de três planos.

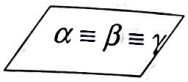
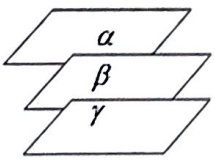
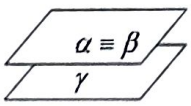
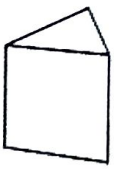
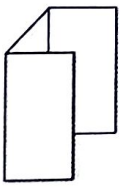
Características	Classificação	Resultado	Significado geométrico
$\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}(\overline{\mathbf{A}}) = 3$	SPD	um ponto	
$\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}(\overline{\mathbf{A}}) = 2$	SP1xI	reta	
$\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}(\overline{\mathbf{A}}) = 1$	SP2xI	plano	
$\text{car}(\mathbf{A}) \neq \text{car}(\overline{\mathbf{A}})$	SI	$\{\}$	Estudar caso a caso

Tabela 5.17.: Posição relativa de três planos, quando o sistema é impossível.

Três planos paralelos	Dois planos coincidentes, paralelos a um terceiro	Os planos intercetam-se dois a dois	Dois planos paralelos, concorrentes com um terceiro
			
$\text{car}(\mathbf{A}) = 1$	$\text{car}(\mathbf{A}) = 1$	$\text{car}(\mathbf{A}) = 2$	$\text{car}(\mathbf{A}) = 2$
$\text{car}(\overline{\mathbf{A}}) = 2$	$\text{car}(\overline{\mathbf{A}}) = 2$	$\text{car}(\overline{\mathbf{A}}) = 3$	$\text{car}(\overline{\mathbf{A}}) = 3$

Exemplo 140.

Dados os pontos $P_1(1,0,0)$, $P_2(2,1,1)$, e $P_3(-1,2,1)$; seja t a reta P_1P_2 e β o plano $P_1P_2P_3$.

- A equação vetorial da reta r, perpendicular à reta t e que passa pelo ponto $P(1,2,3)$ é obtida através de

$$r: \begin{cases} \vec{r} \perp \overrightarrow{P_1P_2} \\ P=(1,2,3) \end{cases} \Leftrightarrow (r_x,r_y,r_z)\cdot(1,1,1)=0 \Leftrightarrow r_x+r_y+r_z=0$$

Para $r_y=0 \wedge r_z=1$, por exemplo, $\vec{r}=(-1,0,1)$.

Logo, a reta pretendida é

$$r:(x,y,z)=(1,2,3)+k(-1,0,1)\ ,\forall k\in\mathbb{R}$$

- A equação vetorial da reta r, paralela à reta t e que passa por $P(1,\,2,\,3)$ é obtida através de

$$r: \begin{cases} \vec{r} // \overrightarrow{P_1P_2} \\ P(1,2,3) \end{cases} \Leftrightarrow (r_x,r_y,r_z)=k(1,1,1)\,,\forall k\in\mathbb{R}$$

Para $k=1$, por exemplo, $\vec{r}=(1,1,1)$.

Logo, a reta pretendida é

$$r:(x,y,z)=(1,2,3)+k(1,1,1)\ ,\forall k\in\mathbb{R}$$

- A equação geral do plano α, perpendicular ao plano β e que passa por $P(1,2,3)$ é obtida através de:
  - a equação do plano β, obtida através da equação 5.30, é dada por

$$\beta: x+3y-4z-1=0$$

  - $$\alpha: \begin{cases} \vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_\beta \\ P(1,2,3) \end{cases} \Leftrightarrow (A,B,C)\cdot(1,3,-4)=0 \Leftrightarrow A+3B-4C=0$$
  - Para $B=1 \wedge C=1$, por exemplo, $\vec{n}_\alpha=(1,1,1)$.

Logo, a equação do plano pretendido, obtida através da equação 5.33 , é

$$\alpha: x+y+z-6=0$$

- A equação geral do plano α paralelo ao plano β e que passa por $P(1,2,3)$ é obtida através de

$$\alpha: \begin{cases} \vec{n}_\alpha // \vec{n}_\beta \\ P(1,2,3) \end{cases} \Leftrightarrow (A,B,C)=k(1,3,-4)\,,\forall k\in\mathbb{R}$$

Para $k=1$, por exemplo, $\vec{n}_\alpha=(1,3,-4)$.

(continuação)

Logo, a equação do plano pretendido, obtida através da equação 5.33 , é

$$\alpha : x + 3y - 4z + 5 = 0$$

- A equação vetorial da reta r paralela ao plano β e que passa por $P(1,2,3)$ é obtida através de

$$r : \begin{cases} \vec{r} \perp \vec{n}_\beta \\ P(1,2,3) \end{cases} \Leftrightarrow (r_x, r_y, r_z) \cdot (1,3,-4) = 0 \Leftrightarrow r_x + 3r_y - 4r_z = 0$$

Para $r_y = 1 \wedge r_z = 1$, por exemplo, $\vec{r} = (1,1,1)$.

Logo, a reta pretendida é

$$r : (x,y,z) = (1,2,3) + k(1,1,1) \ , \forall k \in \mathbb{R}$$

- A equação vetorial da reta r, perpendicular ao plano β e que passa por $P(1,2,3)$ é obtida através de

$$r : \begin{cases} \vec{r} // \vec{n}_\beta \\ P(1,2,3) \end{cases} \Leftrightarrow (r_x, r_y, r_z) = k(1,3,-4), \forall k \in \mathbb{R}$$

Para $k = 1$, por exemplo, $\vec{r} = (1,3,-4)$.

Logo, a reta pretendida é

$$r : (x,y,z) = (1,2,3) + k(1,3,-4) \ , \forall k \in \mathbb{R}$$

- Os pontos de interseção do plano β com os eixos coordenados são os pontos

$$\begin{cases} \beta \cap OX \Leftrightarrow (1,0,0) \\ \beta \cap OY \Leftrightarrow (0, \frac{1}{3}, 0) \\ \beta \cap OZ \Leftrightarrow (0,0,-\frac{1}{4}) \end{cases}$$

5.9. Problemas métricos relativos a retas e planos

Quando se fala em distâncias, considera-se que é sempre a menor distância possível e, por isso, esta é sempre medida na perpendicular.

5.9.1. Distância entre dois pontos

Sejam dois pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$. Chama-se distância entre P_1 e P_2, e representa-se por $d_{(P_1,P_2)}$ a

$$d_{(P_1,P_2)} = \|P_1 - P_2\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \qquad (5.37)$$

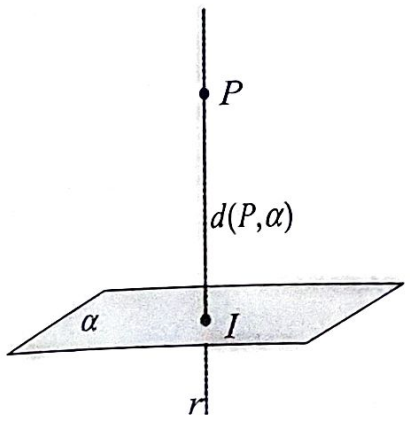
Exemplo 141.

Dados os pontos $P_1\,(2,1,-1)$ e $P_2\,(3,0,2)$, a distância entre os pontos, $d_{(P_1,P_2)}$, é dada por

$$d_{(P_1,P_2)} = \sqrt{(2-3)^2+(1-0)^2+(-1-2)^2} = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}u.d.$$

5.9.2. Distância de um ponto a um plano

Seja o ponto $P_1\,(x_1,y_1,z_1)$ e o plano $\alpha:\ Ax+By+Cz+D=0$



1. Escrever a equação da reta que contém P e é perpendicular a α.
   $r:(x,y,z)=(x_1,y_1,z_1)+k(A,B,C)$
2. Determinar o ponto I, de interseção da reta com o plano
   $r\cap\alpha = I.$
3. Determinar a distância do ponto I ao ponto P.

Ou, simplesmente,

$$d_{(P_1,\alpha)} = \frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{5.38}$$

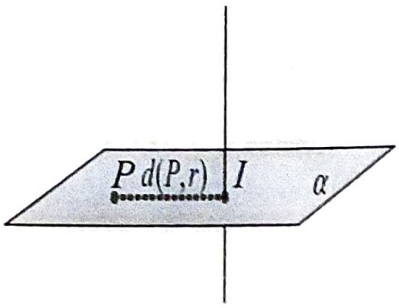
Exemplo 142.

Dados o ponto $P_1\,(2,1,-1)$ e o plano $\alpha = 2x-y+2z-3=0$, a distância do ponto ao plano, $d_{(P_1,\alpha)}$, é dada por

$$d_{(P_1,\,\alpha)} = \frac{|2.2-1.1+2.(-1)-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}u.d$$

5.9.3. Distância de um ponto a uma reta

Seja o ponto $P_1\,(x_1,y_1,z_1)$ e o vetor da reta $\vec{u}=(a,b,c)$



1. Escrever a equação do plano α que contém P e é perpendicular a r

   $\vec{n}_\alpha = (a, b, c)$

   $\alpha : a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$

2. Determinar o ponto I de interseção da reta dada com o plano construído $r \cap \alpha = I$.

3. Determinar a distância do ponto I a ponto P.

Exemplo 143.

Dados $P_1(2, 1, -1)$ e $r : \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 3z - 2 \end{cases}$ para calcular a distância do ponto à reta, $d_{(P_1, r)}$, comece-se por determinar a equação do plano π que contém P_1 e é perpendicular à reta r

$$\pi : \begin{cases} \pi \perp r \quad \Rightarrow \vec{n}_\pi // \vec{r} \quad \Leftrightarrow (A, B, C) = k(1, 3, 1), \forall k \in \mathbb{R} \\ P_1(2, 1, -1) \end{cases}$$

O ponto I de interseção da reta r com o plano π

$$r \cap \alpha : \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 3z - 2 \\ x + 3y + z - 4 = 0 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right]_{L_3 = L_3 - L_1}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \end{array}\right]_{L_3 = L_3 - 2L_2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z - 1 = \frac{1}{8} \\ y = 3z - 2 = \frac{11}{8} \\ z = \frac{9}{8} \end{cases}$$

a distância do ponto I ao ponto P_1 é

$$d_{(P_1, I)} = \sqrt{(2 - \tfrac{1}{8})^2 + (1 - \tfrac{11}{8})^2 + (-1 - \tfrac{9}{8})^2} = \sqrt{\tfrac{225+9+289}{64}} = \tfrac{\sqrt{523}}{8} u.d.$$

5.9.4. Distância de uma reta a um plano

Seja $P_1(x_1, y_1, z_1)$ o ponto da reta r e o plano $\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$, a distância da reta ao plano, $d_{(r, \alpha)}$, é dada por

$$d_{(r, \alpha)} = d_{(P_1, \alpha)} = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Exemplo 144.

Seja $r: \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 3z - 2 \end{cases}$ e $\alpha = 2x + 6y + 2z - 3 = 0$.

Para determinar a distância da reta ao plano, $d_{(r,\alpha)}$, começa-se por verificar a perpendicularidade entre r e α

$\pi \perp r \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_\pi = k\vec{r} \quad \Leftrightarrow \quad (2,6,2) = k\,(1,3,1)$, verdade para $k = 2$

Identificação das coordenadas de um ponto P_1 da reta r

$P_1 = (0,1,1)$, por exemplo,

$d_{(P_1,\,\alpha)} = \frac{|0.2+1.6+1.2-3|}{\sqrt{2^2+6^2+2^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{44}} = \frac{5\sqrt{44}}{44} u.d.$

5.9.5. Distância entre dois planos

Sejam os planos $\alpha:\ Ax + By + Cz + D = 0$ e $\beta:\ A'x + B'y + C'z + D' = 0$

$$d_{(\alpha,\,\beta)} = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Exemplo 145.

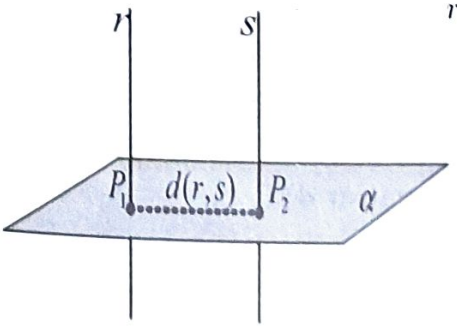
Dados $\alpha = 2x - y + z = 0$ e $\beta = -2x + y - z + 2 = 0$, para determinar $d_{(\alpha,\,\beta)}$ comece-se por verificar o paralelismo entre α e β

$\alpha // \beta \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_\alpha = k\vec{n}_\beta \quad \Leftrightarrow \quad (2,-1,1) = k\,(-2,1,-1)$, verdade para $k = -1$

$d_{(\,\alpha,\beta\,)} = \frac{|0-(-2)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} u.d.$

5.9.6. Distância entre duas retas

1. Se r e s são paralelas



Seja o ponto $P(x,y,z) \in r$ e o vetor da reta r, $\vec{r} = (a,b,c)$, e o vetor da reta s, $\vec{s} = (a,b,c)$

a) Escrever a equação do plano π, perpendicular a r e s e que passa por P.

b) Determinar o ponto P_1 (interseção de π com s).

c) Determinar $d(P,P_1)$.

Exemplo 146.

Dados $r:\ (x,y,z)=(-1,2,0)+k\,(2,-1,3)$ e $s:\ \begin{cases} x=1-2y \\ z=2-3y \end{cases}$

para determinar $d_{(r,s)}$, comece-se por determinar a posição relativa de r e s

$r//s? \quad \Rightarrow \quad \vec{r}=k\vec{s} \quad \Leftrightarrow \quad (2,-1,3)=k\,(-2,1,-3)$, verdade para $k=-1$

equação do plano π, perpendicular a r e s e que passa por P_r

$\pi\perp r \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_\pi=k\vec{r} \quad \Leftrightarrow \quad (A,B,C)=(2,-1,3)$, verdade para $k=1$

$$\pi:\quad 2(x+1)-1(y-2)+3(z-0)=0$$

$$\pi:\quad 2x-y+3z+4=0$$

ponto I de interseção da reta s com o plano π

$$s\cap\pi:\ \begin{cases} x=1-2y \\ z=2-3y \\ 2x-y+3z=-4 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -4 \end{array}\right] \underset{L_3=L_3-2L_1}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -6 \end{array}\right] \underset{C_3\leftrightarrow C_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & -6 \end{array}\right] \underset{L_3=L_3-3L_2}{\sim}$$

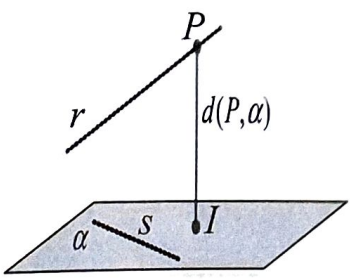
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -14 & -12 \end{array}\right] \underset{L_3=L_3-3L_2}{} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y+1=-\frac{5}{7} \\ z=-3z+2=-\frac{4}{7} \\ y=\frac{6}{7} \end{cases}$$

a distância do ponto I ao ponto P_1

$$d_{(r,s)}=d_{(P_r,I)}=\sqrt{(-1-\tfrac{5}{7})^2+(2+\tfrac{4}{7})^2+(0-\tfrac{6}{7})^2}$$

$$=\sqrt{\tfrac{504}{649}}=\tfrac{\sqrt{504}}{7}=\tfrac{6}{7}\sqrt{14}u.d.$$

2. Se r e s são enviesadas



Seja o ponto $P\,(x,y,z)\in r$, o vetor da reta r: $\vec{r}=(a,b,c)$ e o vetor da reta s, $\vec{s}=(a,b,c)$

a) Escrever a equação do plano π que contém s e é paralelo a r.

b) Determinar $d\,(P,\pi)$.

Exemplo 147.

Seja $r: x-1=\frac{-2y+4}{3}=\frac{2}{3}z-2$ e $s: \begin{cases} y=2x-10 \\ z=x-9 \end{cases}$.

Para determinar $d_{(r,s)}$ comece-se por determinar a posição relativa de r e s

- Posição relativa de r e s

  $r: x-1=\frac{y-2}{-\frac{3}{2}}=\frac{z-3}{\frac{3}{2}}$

  $r//s? \quad \Rightarrow \quad \vec{r}=k\vec{s} \quad \Leftrightarrow \quad \left(1,\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=k\,(1,2,1)$, falso $\forall k \in \mathbb{R}$,

  logo, as retas r e s são enviesadas

- Equação do plano π, que contém r, que é paralelo a s e que contém P_r

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \pi: \quad 9x+y-7z+10=0$$

Logo, a distância do ponto P_s ao plano π é dada por

$$d_{(Ps,\pi)}=\frac{|9.5+1.0-7.(-4)|}{\sqrt{9^2+1^2+7^2}}=\frac{73}{\sqrt{131}}u.d.$$

5.9.7. Ângulos

O ângulo entre duas retas, entre dois planos ou entre uma reta e um plano obtém-se com recurso à definição de produto escalar de vetores.

Assim, tem-se:

1. O **ângulo θ entre 2 retas** é obtido através da consideração dos vetores diretores de cada uma das retas, isto é, os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$

$$\angle(r,s)=\angle(\vec{u},\vec{v}=\theta=\arccos\left|\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,.\,\|\vec{v}\|}\right| \tag{5.39}$$

2. O **ângulo θ entre 2 planos** é obtido através da consideração dos vetores normais a cada um dos planos, isto é, os vetores $\vec{n_\alpha}$ e $\vec{n_\beta}$

$$\angle(\alpha,\beta)=\angle(\vec{n}_\alpha,\vec{n}_\beta)=\theta=\arccos\left|\frac{\vec{n}_\alpha.\vec{n}_\beta}{\|\vec{n}_\alpha\|\,.\,\|\vec{n}_\beta\|}\right| \tag{5.40}$$

1. O **ângulo θ entre 1 reta e 1 plano** é obtido através da consideração do vetor normal ao plano α e o vetor diretor da reta, isto é, os vetores $\vec{u}$ e $\vec{n_\alpha}$

$$\angle(r,\alpha)=\angle(\vec{u},\vec{n}_\alpha)=\theta=\arcsin\left|\frac{\vec{u}.\vec{n}_\alpha}{\|\vec{u}\|\,.\,\|\vec{n}_\alpha\|}\right| \tag{5.41}$$

5.10. Exercícios resolvidos

5.10.1. Retas e planos

Exercício 62. Considere os pontos $P_1(1,0,0)$, $P_2(2,1,1)$ e $P_3(-1,2,1)$.
Determine:

1. as equações vetorial, paramétrica e cartesiana da reta P_1P_2;
2. as equações vetorial, paramétrica e cartesiana do plano $P_1P_2P_3$;
3. um vetor unitário (ou versor) normal ao plano $P_1P_2P_3$

Resolução.

1. A equação vetorial tem a direção do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$, cujas coordenadas são
$$\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (2,1,1) - (1,0,0) = (1,1,1)$$
então a reta P_1P_2 tem a equação vetorial
$$(x,y,z) = (1,0,0) + k(1,1,1), \quad \forall k \in \mathbb{R}$$
sendo as suas equações paramétricas dadas pelo sistema de equações
$$\begin{cases} x = 1+k \\ y = k \\ z = k \end{cases}, \quad \forall k \in \mathbb{R}$$
que, resolvidas em ordem a k, permitem determinar as seguintes equações cartesianas da reta
$$x - 1 = y = z$$

2. Como já foi calculado no ponto anterior um vetor do plano $P_1P_2P_3$, o vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$, apenas é necessário calcular um segundo vetor do plano. Considere-se, para esse fim, o vetor $\overrightarrow{P_2P_3}$, de coordenadas
$$\overrightarrow{P_2P_3} = P_3 - P_2 = (-1,2,1) - (2,1,1) = (-3,1,0)$$
então, a equação vetorial do plano é dada por
$$(x,y,z) = (1,0,0) + k_1(1,1,1) + k_2(-3,1,0), \quad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$
a partir da qual é possível obter as equações paramétricas do plano, dadas por
$$\begin{cases} x = 1 + k_1 - 3k_2 \\ y = k_1 + k_2 \\ z = k_1 \end{cases}, \quad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$
obtendo-se para a equação geral do plano
$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(-1) - y(3) + z(4) = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 4z - 1 = 0$$

3. Considere-se $\vec{n}$, um vetor normal ao plano $P_1P_2P_3$, e cujas coordenadas são dadas pelos coeficientes A, B e C da equação geral, então o seu versor é dado por
$$\text{vers}(\vec{n}) = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{(1,3,-4)}{\sqrt{1+9+16}} = \left(\frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{3}{\sqrt{26}}, \frac{-4}{\sqrt{26}}\right)$$

■

Exercício 63. Considere os pontos $A(2,1,2)$ e $B(-1,-1,1)$, o plano π de equação geral $x + 2y + Cz + K = 0$ e as retas $s_1 = \begin{cases} 4x - 2y - 2z = 0 \\ 2x - z = 1 \end{cases}$ e

$s_2 = \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 4y = 5 \end{cases}$.

Determine:

1. uma equação da reta r que passa em A e B.
2. a posição relativa das retas s_1 e s_2 .
3. a equação da reta s que interceta as retas s_1 e s_2 e tem a direção do vetor $\vec{u} = (2,-1,-1)$.
4. os valores de C e K, de tal forma que a reta r pertença ao plano π.
5. a distância de A a s_1.

Resolução.

1. A equação vetorial da reta r que passa em A e B é:
$$P = A + k\overrightarrow{AB}\ , \forall k \in \mathbb{R}$$
Como $\overrightarrow{AB} = B - A = (-3,-2,-1)$, tem-se a equação
$$(x,y,z) = (2,1,2) + k(-3,-2,-1)\ , \forall k \in \mathbb{R}$$

2. A posição relativa das retas s_1 e s_2 é determinada da seguinte forma:
$$s_1 \cap s_2 = \begin{cases} 4x - 2y - 2z = 0 \\ 2x + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + 4y = 5 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \end{array}\right] \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 = L_2 - 2L_1 \\ L_3 = L_3 - 4L_1 \\ L_4 = L_4 - L_1}}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -6 & -4 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{array}\right]_{\substack{L_3=L_3-L_2 \\ L_4=L_4-\frac{5}{2}L_2}} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 13/2 & 13/2 \end{array}\right]_{L_3=-\frac{1}{3}L_3} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]_{L_4=L_4-L_3} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{car}(\mathbf{A}) = 2 \wedge \text{car}([\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}]) = 3 \\ n\text{=n.º de incógnitas} = 3 \\ G.I. = 0 \end{array} \right.$$

Logo, o sistema é possível e determinado e, por isso, as retas são concorrentes.

3. Ponto comum às retas s_1 e s_2:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 1 \\ 2y - 3z = -1 \\ z = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + y - z = 1 \\ y = (-1 + 3z)/2 = 1 \\ \ldots\ldots \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + y - z = 1 \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{array} \right.$$

Logo a equação da reta s que corta as retas s_1 e s_2 e tem a direção do vetor $(2, -1, -1)$ é

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + k(2, -1, -1) \;, \forall k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} .$$

4. A reta r de equação $r : (x, y, z) = (2, 1, 2) + k(-3, -2, -1),\ k \in \mathbb{R}$ pertence ao plano π de equação $\pi : x + 2y + Cz + K = 0$ sse o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2 - 3k \\ y = 1 - 2k \\ z = 2 - k \\ x + 2y + Cz + K = 0 \end{array} \right.$$

for possível e indeterminado. Isto é, se

$$2 - 3k + 2(1 - 2k) + C(2 - k) + K = 0 \Leftrightarrow (-7 - C)k = -4 - 2C - K$$

é possível e indeterminada, ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{l} -7 - C = 0 \\ -4 - 2C - K = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C = -7 \\ K = -4 - 2C = 10 \end{array} \right.$$

5. $A = (2, 1, 2)$ e $s_1 = \left\{ \begin{array}{l} 4x - 2y - 2z = 0 \\ 2x - z = 1 \end{array} \right.$

Primeiro, determine-se o vetor diretor de s_1. Para isso, vão determinar-se 2

pontos de s_1

$$A : \begin{cases} 4x-2y-2z=0 \\ 2x-z=1 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ z=-1 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow A=(0,1,-1)$$

$$B : \begin{cases} 4x-2y-2z=0 \\ 2x-z=1 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ z=1 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow B=(1,1,1)$$

Então, o vetor diretor da reta s_1 é $\vec{u}=B-A=(1,0,2)$

Mas, então, o plano perpendicular à reta tem uma equação da forma

$$x+2z+D=0$$

Como A pertence ao plano, tem-se

$$2+4+D=0 \Leftrightarrow D=-6$$

logo, o plano perpendicular à reta s_1 e que passa no ponto A é

$$x+2z-6=0$$

Para determinar o ponto de interseção da reta e do plano, comece-se por determinar as equações paramétricas da reta

$$s_1 : \begin{cases} 4x-2y-2z=0 \\ 2x-z=1 \end{cases} \Leftrightarrow s_1 : \begin{cases} y=2x-z=2k-2k+1=1 \\ z=2x-1=2k-1 \\ x=k \end{cases}$$

Vai-se, agora, determinar o ponto de interseção da reta e do plano

$$k+2(2k-1)-6=0 \Leftrightarrow 5k-8=0 \Leftrightarrow k=\tfrac{8}{5}$$

logo, o ponto de interseção é

$$P : \begin{cases} y=1 \\ z=2(8/5)-1=11/5 \\ x=8/5 \end{cases}$$

Finalmente, a distância é

$$d(A,P)=||P-A))=$$

$$=\left\|\left(\tfrac{8}{5},1,\tfrac{11}{5}\right)-(2,1,2)\right\|=\left\|\left(\tfrac{-2}{5},0,\tfrac{1}{5}\right)\right\|=\sqrt{\tfrac{4}{25}+0+\tfrac{1}{25}}=\tfrac{\sqrt{5}}{5}u.d.$$

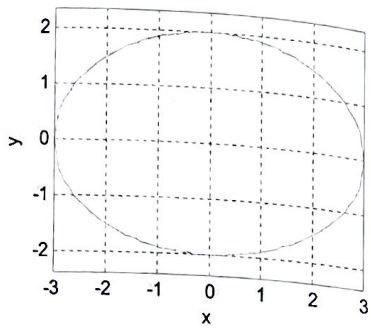
■

5.10.2. Exercícios resolvidos em MATLAB

Exercício 64. Represente graficamente a elipse de equação $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

Resolução.

```
>> x=-3:.1:3;
>> y1=sqrt(4-4/9*x.^2);
>> y2=-sqrt(4-4/9*x.^2);
>> plot(x,y1);
>> hold on;
>> plot(x,y2);
>> axis equal;
>> grid on;
>> xlabel('x');
>> ylabel('y');
```



■

Exercício 65. Determine a posição relativa dos planos:

$\alpha_1 : x + y + 4z - t - 1 = 0$
$\alpha_2 : x + 4y + z + 3t - 1 = 0$
$\alpha_3 : 5x + 5y + 2z - 2 = 0$
$\alpha_4 : 3x + 5y + 4z - 1 = 0$

Resolução.

utilizando o comando rref resolver o sistema que tem por linhas as equações dos planos

SCRIPT MATLAB 5.1

```
>> format rat
>> A=[1,1,4,-1;1,4,1,3;5,5,2,0;3,5,4,0]; B=[1;1;2;1]; k=[A B]
k =
     1     1     4    -1     1
     1     4     1     3     1
     5     5     2     0     2
     3     5     4     0     1

>> S=rref(k)
S =
     1     0     0     0     7/8
     0     1     0     0    -5/8
     0     0     1     0     3/8
     0     0     0     1     3/4
```

Como o sistema é possível e determinado, os 4 planos têm um ponto em comum.

■

5.11. Exercícios propostos

1. Considere os vetores $\vec{u} = (1,1,1)$, $\vec{v} = (1,0,1)$, $\vec{w} = (0,1,-1)$ e $\vec{t} = (x,1,4)$ e determine
   a) $\vec{u} + 2\vec{v}$
   b) $3\vec{u} - 2\vec{v} + 2\vec{w}$
   c) $\vec{u}.\vec{v}$
   d) $\vec{u} \wedge \vec{v}$
   e) $(\vec{u} \wedge \vec{w}).\vec{v}$
   f) o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$
   g) o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{w}$
   h) $x \in \mathbb{R}$, tal que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{t}$ sejam perpendiculares
   i) um vetor $\vec{z}$ perpendicular a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$
   j) um vetor unitário $\vec{z}$ com a direção de $\vec{w}$
   k) um vetor $\vec{z}$ paralelo a $\vec{v}$
   l) um vetor $\vec{z}$ paralelo a $\vec{u}$ e de módulo 3
2. Considere os pontos $P_1(-1,-2,0)$, $P_2(0,0,3)$, $P_3(2,4,9)$ e $P_4(4,6,0)$ e determine
   a) se os pontos P_1 e P_2 são colineares.
   b) se os pontos P_1, P_2 e P_3 são colineares.
   c) se os vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_2P_1}$ são colineares.
   d) se os vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_2P_4}$ são colineares.
   e) P_5 de modo que os vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_5P_2}$ sejam colineares.
   f) se os vetores $\overrightarrow{P_2P_3}$ e $\overrightarrow{P_2P_4}$ são complanares.
   g) P_5 de modo que os pontos P_1, P_2 , P_4 e P_5 sejam complanares.
   h) a veracidade da afirmação "Três pontos colineares definem dois vetores paralelos".
   i) a veracidade da afirmação "Vetores colineares são complanares".
3. Mostre que, se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais, então $||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2$.
4. Escreva as equações, paramétricas, cartesianas e vetoriais
   a) dos três eixos coordenados
   b) dos três planos coordenados
5. Indique um ponto e um vetor diretor de cada uma das seguintes retas

a) $r_1 : \begin{cases} x = 3k \\ y = -2 \\ z = 2 - k \end{cases}, \forall k \in \mathbb{R}$ b) $r_2 : \begin{cases} \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{z-3}{4} \\ y = 0 \end{cases}$ c) $r_3 : \begin{cases} y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$

d) $r_4 : \begin{cases} y = -2x \\ z = 3 + x \end{cases}$ e) $r_5 : x = y = z$ f) $r_6 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

6. Considere os pontos $A(-1,2,3)$, $B(3,0,1)$ e $C(1,0,0)$ e determine
   a) as equações da reta AB.
   b) os planos projetantes da reta AB.
   c) se é verdade a afirmação "*O ponto* $P(2,2,2)$ *pertence à reta* AB".
   d) as equações do plano ABC.
   e) se é verdade a afirmação "*O ponto* $P(1,1,2)$ *pertence ao plano* ABC".
   f) se é verdade a afirmação "*A reta* $r : x = y = z$ *pertence ao plano* ABC"
7. Considere as retas $r : \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = k \\ z = 3 - 5k \end{cases}, \forall k \in \mathbb{R}$ e $s : \begin{cases} y = -2x + 4 \\ 2z = 3x \end{cases}$ e escreva uma equação vetorial para cada uma das retas.
8. Considere o plano $\alpha : 2x - y - 4z = 1$ e escreva uma sua equação vetorial.
9. Determine a ordenada e a cota do ponto P_1, de abcissa 2 e pertencente à reta que passa pelo ponto $P_2(3,-1,4)$ e tem a direção do vetor $\vec{u} = \vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$.
10. Determine a e b de modo que
    a) as retas $r_1 : \frac{x+1}{a} = \frac{y-2}{b} = -z - 3$ e $s : \begin{cases} x = -3 + 2k \\ y = 4 - 3k \\ z = 2 - k \end{cases}, \forall k \in \mathbb{R}$ sejam paralelas
    b) as retas $r_1 : \frac{x+1}{a} = \frac{y-2}{b} = -z - 3$ e $s : \begin{cases} x = -1 + k \\ y = 3 - 2k \\ z = -3k \end{cases}$ sejam perpendiculares
    c) a reta $r_2 : \begin{cases} y = ax + 1 \\ z = b - 2x \end{cases}$ e o plano $\alpha : 2x + y + z = 2$ sejam paralelos
    d) a reta $r_2 : \begin{cases} y = ax + 1 \\ z = b - 2x \end{cases}$ e o plano $\alpha : 2x + y + z = 2$ sejam perpendiculares
    e) a reta $r_1 : \frac{x+1}{a} = \frac{y-2}{b} = -z - 3$ pertença ao plano $\alpha : 2x + y + z = 2$
11. Considere o plano de equação: $\alpha : x + 3y - z = 1$ e dê um exemplo de
    a) um plano β paralelo ao plano α.
    b) um plano γ perpendicular ao plano α.
    c) uma reta r paralela ao plano α.
    d) uma reta s perpendicular ao plano α.
12. Determine a equação do plano α que passa pelo ponto $P(1,1,1)$ e cujo vetor normal faz com $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ângulos de, respetivamente, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$.
13. Considere os pontos $A(2,1,3)$, $B(0,1,-1)$, $C(3,1,1)$ e $D(0,0,8)$ e determine

a) se o plano ABC é paralelo a um dos planos coordenados. Em caso afirmativo, identifique-o.

b) um plano α, que contém a reta AB e o ponto D.

c) o plano β, que contém as retas AB e BC e o ponto D.

14. Calcule o valor de a e b, reais, de modo que

a) a reta $r: \begin{cases} x = -2 - k \\ y = k \\ z = -1 - 2k \end{cases}, \forall k \in \mathbb{R}$ esteja contida no plano $\alpha: (a+1)x + by - z = 5$.

b) as retas $r: (x, y, z) = (1, 0, 2) + k(0, 1, -1)$ e $s: (x, y, z) = (0, 1, -1) + k(1, a-2, 2b+3)$ sejam complanares.

15. Verifique se as retas r_1 e r_2 estão no mesmo plano. Se estiverem, identifique a sua equação

a) $r_1: (x, y, z) = (1, 2, 3) + k(-1, 2, 3), \forall k \in \mathbb{R}$ e $r_2: (x, y, z) = (0, 1, 1) + k(1, 1, -2), \forall k \in \mathbb{R}$

b) $r_1: (x, y, z) = (1, -1, 1) + k(2, 1, 1), \forall k \in \mathbb{R}$ e $r_2: (x, y, z) = (1, 0, 1) + k(2, 1, 1), \forall k \in \mathbb{R}$

16. Comente, justificando, a veracidade das afirmações

a) "*Retas paralelas pertencem ao mesmo plano*".

b) "*Duas retas complanares e não paralelas são concorrentes*".

c) "*Duas retas complanares são sempre paralelas*".

d) "*Duas retas perpendiculares entre si têm um ponto comum*".

e) "*Considere dois planos perpendiculares entre si. Se um terceiro plano é paralelo a um deles, então é perpendicular ao outro*".

17. Considere as retas $r: x - 2 = \frac{y}{3} = \frac{1-z}{2}$ e $s: \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 3 - k \\ z = k \end{cases}, \forall k \in \mathbb{R}$, o ponto $P(-1, 2, 0)$ e determine

a) a reta t_1, paralela à reta r e que contém o ponto P.

b) a reta t_2, paralela ao eixo dos xx e que contém o ponto P.

c) a reta t_3, perpendicular à reta r e que contém o ponto P.

d) a reta t_4, perpendicular à reta r e que atravessa o ponto $\alpha: -x + y + z = 7$.

e) a reta t_5, perpendicular à reta r, que pertence ao plano $\alpha: x + y + z = 1$ e que contém o ponto P.

f) a reta t_6, perpendicular às retas r e s e que contém o ponto P.

g) a reta t_7, que interseta as retas r e s e que contém o ponto P.

h) a reta t_8, que interseta perpendicularmente s e contém o ponto P.

i) a reta t_9, que interseta perpendicularmente as retas r e s e que contém o ponto P.

18. Considere os pontos $A(-1,2,0)$, $B(3,-2,2)$, $C(1,-2,2)$ e $D(1,-1,1)$ e determine

    a) as equações vetorial, paramétrica e cartesiana do plano ABC.

    b) a reta r_1, perpendicular ao plano ABC e que contém o ponto D.

    c) a reta r_2, perpendicular ao plano XOZ e que contém o ponto D.

    d) a reta r_3, perpendicular ao plano definido pelas retas AB e AC e que as interseta.

    e) uma reta r_4, paralela ao plano ABC e que contém o ponto D.

    f) uma reta r_5, paralela ao plano ABC e que interseta o eixo dos yy.

    g) uma reta r_6, paralela ao plano ABC e que interseta a reta AB.

    h) a reta r_7, paralela ao plano $\alpha : x+y+z=0$, que interseta o eixo zz e que contém o ponto A.

    i) a reta r_8, paralela ao plano XOY, que pertence ao plano $\alpha : 2x+y-z=3$ e que interseta o eixo dos zz.

    j) a reta r_9, paralela aos planos $\alpha_2 : x+2y+3z=4$ e $\alpha_3 : 2x+3y+4z=5$ e que contém o ponto $E(1,2,3)$.

    k) a reta r_{10}, que não interseta nenhum dos planos $\alpha_4 : -2x-y+2z=2$ e $\alpha_5 : -2x-5y+4z=0$ e que contém o ponto $F(1,1,1)$.

19. Considere os pontos $A(-1,2,0)$, $B(3,-2,2)$, $C(1,-2,2)$ e $D(1,-1,1)$ e determine

    a) o plano β_1, paralelo ao plano ABC e que contém o ponto D.

    b) o plano β_2 , perpendicular ao plano ABC e que contém o ponto D.

    c) um plano β_3, perpendicular ao plano $\alpha : 2x-y+3z=1$ e que contém os pontos A e B.

    d) um plano β_4, perpendicular ao plano $\alpha : 2x-y+3z=1$ e que contém a reta AB e a origem.

    e) o plano β_5, perpendicular aos planos ABC e $\beta : x+y+z=1$ e que contém o ponto D.

20. Considere os pontos $A(-1,2,0)$, $B(3,-2,2)$, $C(1,-2,2)$ e $D(1,-1,1)$ e determine

    a) o plano β_1, paralelo à reta AB e que contém o ponto D.

    b) o plano β_2, paralelo ao eixo yy e que contém os pontos A e B.

    c) o plano β_3, paralelo à reta $r_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}$ e que contém a reta $r_2 : x = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{0}$.

    d) o plano β_4, paralelo às retas AB e AC e que contém o ponto D.

    e) o plano β_5, perpendicular à reta AB e que contém o ponto D.

    f) o plano β_6, de simetria relativamente aos pontos A e B.

21. Considere os planos $\alpha : 2x-y+z=2$ e $\beta : x+y-az=2$, a reta $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ e o ponto $A(1,2,0)$ e determine

    a) o plano γ_1, perpendicular ao plano α e definido pela reta r e pelo ponto A.

b) o plano γ_2, perpendicular ao plano β e definido pela reta r e pelo ponto $B(a, 1, -1)$.

c) o plano γ_3, perpendicular ao plano α e paralelo ao eixo dos xx e que contém o ponto A.

d) o plano γ_4 que contém a reta r e interseta o plano α.

e) dois planos, γ_5 e γ_6, perpendiculares entre si, paralelos à reta r e que contêm ambos o ponto A.

22. Determine a interseção entre os seguintes planos, assim como a sua posição relativa no espaço

a) $\begin{cases} \alpha : (x,y,z) = (1,0,0) + k_1(0,1,1) + k_2(1,2,1) \\ \beta : (x,y,z) = (0,0,0) + k_1(0,3,0) + k_2(-2,-1,-1) \end{cases}, \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

b) $\begin{cases} \alpha : 6x + 3y + 4z = 12 \\ \beta : x + 2y + z = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \alpha : x + y + z = 2 \\ \beta : 2x - y + 2z = 1 \\ \gamma : 3x + 2y - z = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \alpha : x - y + 2z + 1 = 0 \\ \beta : 2x - y + z + 2 = 0 \\ \gamma : -x + 2y - 5z - 1 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \alpha : 3x - y + 4z = 3 \\ \beta : x + 2y - 4z = 0 \\ \gamma : 12x - 4y + 16z = 12 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \alpha_1 : x + 2y - z + 2 = 0 \\ \alpha_2 : 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ \alpha_3 : -2x - 4y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \alpha : x + 2y - z = 6 \\ \beta : 2x + 4y - 2z = 5 \\ \delta : 2x + 4y - 2z = 12 \end{cases}$

23. Determine a interseção entre as seguintes retas, assim como a sua posição relativa no espaço.

a) $\begin{cases} r : \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x \end{cases} \\ s : \begin{cases} x = 1 - 3k \\ y = 4 - 6k \\ z = 3k \end{cases}, \forall k \in \mathbb{R} \end{cases}$

b) $\begin{cases} r : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-5}{4} \\ s : \begin{cases} x = 5 + k \\ y = 2 - k \\ z = 7 - 2k \end{cases}, \forall k \in \mathbb{R} \end{cases}$

c) $\begin{cases} r : \begin{cases} x = -1 + 2z \\ y = 1 + z \end{cases} \\ s : (x,y,z) = (0,-1,0) + k(1,-2,0), \forall k \in \mathbb{R} \end{cases}$

d) $\begin{cases} r : x + 3 = \dfrac{2y-4}{4} = \dfrac{z-1}{3} \\ s : (x,y,z) = (0,2,2) + k(1,1,-1), \forall k \in \mathbb{R} \end{cases}$

24. Determine a interseção entre as seguintes retas e planos, assim como a sua posição relativa no espaço

a) $\begin{cases} r: \begin{cases} x = 2+3k \\ y = -1-2k, \forall k \in \mathbb{R} \\ z = -k \end{cases} \\ \alpha: 9x-6y-3z+5=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} r: \begin{cases} x = k \\ y = 1+k, \forall k \in \mathbb{R} \\ z = -2 \end{cases} \\ \alpha: x-2y=3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} r: \begin{cases} x-y=1 \\ x-2y=0 \end{cases} \\ \alpha: x+y=2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} r: \begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y-z=1 \end{cases} \\ \alpha: -x-2y+2z=-1 \end{cases}$

25. Considere os planos: $\alpha: kx+ky+z-1=0$, $\beta: x+y-z+k=0$ e $\gamma: x-ky-z+1=0$ e determine, se existirem, os valores reais k, tais que
    a) os 3 planos se intersetem num ponto.
    b) os 3 planos se intersetem numa reta.
    c) os 3 planos apresentem dois a dois uma reta em comum mas os 3 não se intersetem.
26. Considere os planos $\alpha: 2x+y+2z-\lambda=0$, $\beta: kx-y+z=0$ e $\gamma: 2x+y+2z=0$. Indique, se existirem, os valores de k e λ para os quais
    a) α perpendicular a β e α coincidente com γ.
    b) α e β têm uma reta comum.
    c) dois planos são coincidentes e um é paralelo.
27. Considere os pontos $A(1,2,1)$, $B(-1,1,0)$, $C(0,1,2)$, $D(1,0,2)$ e $E(3,1,1)$ e determine, se existir,
    a) o ângulo entre as retas DE e AB.
    b) o ângulo entre os planos ADE e BDE.
    c) o ângulo entre a reta CD e o plano BDE.
    d) a distância de A à reta CD.
    e) a distância de B ao plano ADE.
28. Considere os planos $\alpha: kx+ky+z+1=0$, $\beta: x+y-z+k=0$, $\delta: x+ky+z=-1$ e $\gamma: -kx+2y+z=0$ e determine, se existirem,
    a) os valores de k, para os quais os 3 primeiros planos apresentam uma reta comum.
    b) os valores de k, tais que os dois primeiros planos sejam paralelos e os outros dois sejam perpendiculares.
29. Calcule a projeção ortogonal
    a) do ponto $P(0,0,0)$ sobre a reta $r: \begin{cases} x+y=1 \\ z=0 \end{cases}$.
    b) do ponto $P(4,0,1)$ sobre o plano $\alpha: 3x-4y=-2$.
    c) da reta $r: \begin{cases} y=-3+2x \\ z=-x \end{cases}$ sobre o plano $\alpha: x-y+2z=0$.

30. Considere o paralelepípedo apresentado na figura 5.12, de vértices A, B, C, D, E, F, G e H, com $\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = 10cm$ e $\left\|\overrightarrow{AE}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|$ e cuja reta que passa nos pontos A e C faz um ângulo de 30^o com o eixo OY.

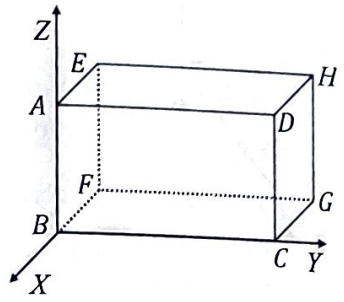


Figura 5.12.: Paralelepípedo.

Sendo o referencial ortonormado indicado, em que a unidade considerada é 5 cm, determine

a) as coordenadas dos vértices A, B, C, E, F.

b) uma equação do plano perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ e que passa em C.

c) uma equação da reta paralela a $\overrightarrow{AC}$ e que passa em F.

d) a distância do ponto E ao plano determinado na alínea b).

31. Considere o cubo apresentado na figura 5.13, de faces paralelas aos planos coordenados e com a origem do referencial ortonormado coincidente com o vértice H.

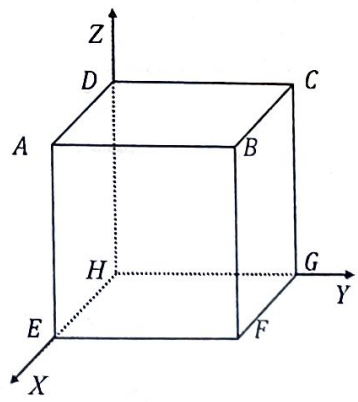


Figura 5.13.: Cubo.

Sendo a área de cada face de 4 cm^2, determine

a) a equação do plano α que passa nos pontos A, G e M, onde M é o ponto médio do segmento $\overline{EF}$. Justifique.

Se não fez esta alínea, considere, para as alíneas seguintes, o plano de equação: $x + 2y + z - 4 = 0$

b) a equação de uma reta r perpendicular ao plano α e que passa na origem.

32. Considere a pirâmide quadrangular com $DE//OY, EC//OX$, de vértice da pirâmide A, de vértices da base B, C, D, e E, com ponto médio entre E e C dado por M e onde O é o ponto de interseção de $\overline{EB}$ com $\overline{CD}$.

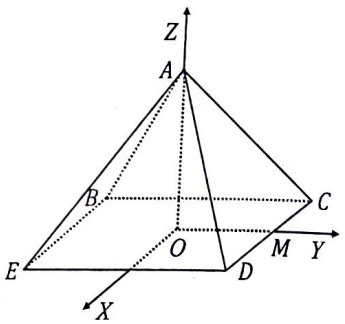


Figura 5.14.: Pirâmide quadrangular.

Sabendo que $\left\|\overrightarrow{EC}\right\| = 4\ cm$, $\left\|\overrightarrow{AM}\right\| = 6\ cm$ e que $\overrightarrow{AM}$ faz um ângulo de 30^o com a base da pirâmide, determine

a) as coordenadas dos pontos A, B, C, D, e E.

Para as alíneas seguintes, caso não tenha resolvido esta alínea, considere os pontos $A(0,0,3)$, $C(-2,2,0)$, $D(-2,-2,0)$ e $E = (2,2,0)$.

b) a equação geral do plano α perpendicular a $\overrightarrow{AE}$ e que passa em D.

c) uma equação vetorial da reta r que passa pelo ponto E e é paralela à reta que passa nos pontos A e C.

d) a distância do ponto A à reta r.

33. Considere os pontos $A\,(2,1,-1)$ e $B\,(3,0,2)$, a reta $r: \begin{cases} x = z-1 \\ y = 3z-2 \end{cases}$ e o plano $\alpha: 2x - y + 2z - 3 = 0$ e determine a distância

a) entre os dois pontos

b) entre o ponto A e a reta r

c) entre o ponto A e o plano α

34. Determine a distância entre

a) as retas $r_1: x - 1 = \frac{-2y+4}{3} = \frac{2}{3}z - 2$ e $s_1: x - 5 = \frac{-y}{2} = 4 + z$

b) as retas $r_2: (x,y,z) = (-1,2,0) + k\,(2,-1,3)$, $\forall k \in \mathbb{R}$ e $s_2: \begin{cases} x = 1 - 2y \\ z = 2 - 3y \end{cases}$

c) os planos $\alpha: 2x - y + z = 0$ e $\beta: -2x + y - z + 2 = 0$

35. Identifique as coordenadas

a) dos pontos da reta $r: \begin{cases} x + y = 2 \\ x = y + z \end{cases}$ que distam três unidades de $P\,(0,2,1)$

b) do ponto do eixo dos xx equidistante dos pontos $A\,(1,0,1)$ e $B\,(0,2,1)$

36. Identifique o lugar geométrico
    a) dos pontos equidistantes dos pontos $A(1,2,1)$ e $B(0,3,-1)$
    b) dos pontos do plano $\alpha : -4x + 3y + z + 10 = 0$, equidistantes dos pontos $A(1,2,1)$ e $B(0,3,-1)$
    c) dos pontos do plano XOY que distam 3 unidades do ponto $A(1,2,1)$
    d) dos pontos do espaço, que distam 2 unidades do ponto $A(1,2,1)$
37. Considere os pontos $A(1,2,1)$, $B(0,3,-1)$ e $C(2,1,0)$ e determine
    a) a área do triângulo ABC
    b) um ponto D, tal que $ABCD$ formem um paralelogramo
    c) a altura do paralelogramo
38. Determine a área do paralelogramo formado pelos pontos $A(0,1,2)$, $B(2,1,1)$, $C(0,1,-1)$ e $D(-1,1,1)$
39. Considere os pontos $A(-1,0,1)$, $B(2,0,1)$ e $C(2,0,-1)$ e
    a) mostre que A, B e C são vértices de um retângulo.
    b) sendo A, B e C vértices de um retângulo, determine a coordenada do quarto vértice.
    c) para $D(-1,0,-1)$, calcule a área e o perímetro do quadrilátero.

5.11.1. Soluções

1. a) (3, 1, 3)
   b) (1, 5, -1)
   c) 2
   d) (1, 0, -1)
   e) -1
   f) $\arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$
   g) $\frac{\pi}{2}$
   h) $x = -5$
   i) $\vec{z} = (1,0,-1)$, por exemplo
   j) $\vec{z} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$
   k) $\vec{z} = (2,0,2)$, por exemplo
   l) $\vec{z} = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$
   m) Dois pontos são sempre colineares
   n) Sim
   o) Sim
   p) Não
   q) $P_5\,(1,2,6)$, por exemplo
   r) Dois vetores livres são sempre complanares

s) $P_5\,(1,0,-8)$, por exemplo

t) Verdade

u) Verdade

2.

3.

a) Eixos coordenados

- As três equações do eixo dos xx são: $OX : (x,y,z)+k\,(1,0,0)\,,\forall k \in \mathbb{R}$ (equação vetorial), $OX : \begin{cases} x = k \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \forall k \in \mathbb{R}$ (equações paramétricas) e $OX : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ (equações cartesianas)
- As três equações do eixo dos yy são: $OY : (x,y,z)+k\,(0,1,0)\,,\forall k \in \mathbb{R}$ (equação vetorial), $OY : \begin{cases} x = 0 \\ y = k \\ z = 0 \end{cases}, \forall k \in \mathbb{R}$ (equações paramétricas) e $OY : \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ (equações cartesianas)
- As três equações do eixo dos zz são: $OZ : (x,y,z)+k\,(0,0,1)\,,\forall k \in \mathbb{R}$ (equação vetorial), $OZ : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = k \end{cases}, \forall k \in \mathbb{R}$ (equações paramétricas) e $OZ : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ (equações cartesianas)

b) planos coordenados

- As três equações do plano XOY são: $XOY : (x,y,z) + k_1\,(1,0,0) + k_2\,(0,1,0)\,,\forall k_1,k_2 \in \mathbb{R}$ (equação vetorial), $XOY : \begin{cases} x = k_1 \\ y = k_2 \\ z = 0 \end{cases}, \forall k_1,k_2 \in \mathbb{R}$ (equações paramétricas) e $XOY : z = 0$ (equação geral)
- As três equações do plano XOZ são: $XOZ : (x,y,z) + k_1\,(1,0,0) + k_2\,(0,0,1)\,,\forall k_1,k_2 \in \mathbb{R}$ (equação vetorial), $XOZ : \begin{cases} x = k_1 \\ y = 0 \\ z = k_2 \end{cases}, \forall k_1,k_2 \in \mathbb{R}$ (equações paramétricas) e $XOZ : y = 0$ (equação geral)
- As três equações do plano YOZ são: $YOZ : (x,y,z) + k_1\,(0,1,0) + k_2\,(0,0,1)\,,\forall k_1,k_2 \in \mathbb{R}$ (equação vetorial), $YOZ : \begin{cases} x = 0 \\ y = k_1 \\ z = k_2 \end{cases}, \forall k_1,k_2 \in$

$\mathbb{R}$ (equações paramétricas) e $XOZ : x = 0$ (equação geral)

4. a) $r_1 : \begin{cases} P_{r_1}(0,-2,2) \\ \overrightarrow{r_1} = (3,0,-1) \end{cases}$

b) $r_2 : \begin{cases} P_{r_2}(0,0,5) \\ \overrightarrow{r_2} = (1,0,2) \end{cases}$

c) $r_3 : \begin{cases} P_{r_3}(0,-1,1) \\ \overrightarrow{r_3} = (1,0,0) \end{cases}$

d) $r_4 : \begin{cases} P_{r_4}(0,0,3) \\ \overrightarrow{r_4} = (1,-2,1) \end{cases}$

e) $r_5 : \begin{cases} P_{r_5}(0,0,0) \\ \overrightarrow{r_5} = (1,1,1) \end{cases}$

f) $r_6 : \begin{cases} P_{r_6}(0,0,0) \\ \overrightarrow{r_6} = (0,0,1) \end{cases}$

5. a) $AB : (x,y,z) = (-1,2,3) + k(4,-2,-2)$, $\forall k \in \mathbb{R}$ (equação vetorial),

$AB : \begin{cases} x = -1+4k \\ y = 2-2k \\ x = 3-2k \end{cases}$, $\forall k \in \mathbb{R}$ (equações paramétricas) e $AB : \frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{-2}$ (equações cartesianas)

b) $\pi_1 : y - z = -1$, $\pi_2 : x + 2z = 5$ e $\pi_3 : x + 2y = 4$

c) Não

d) $ABC : (x,y,z) = (1,0,0) + k_1(4,-2,-2) + k_2(2,0,1), \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ (equação vetorial), $ABC : \begin{cases} x = 1+4k_1+2k_2 \\ y = -2k_1 \\ z = -2k_1 + k_2 \end{cases}$, $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ (equações paramétricas) e $ABC : x + 4y - 2z = 1$ (equação geral)

e) Sim

f) Não

6. $r : (x,y,z) = (1,0,3) + k(2,1,-5)$, $\forall k \in \mathbb{R}$ e
$s : (x,y,z) = (0,4,0) + k\left(1,-2,\frac{3}{2}\right)$, $\forall k \in \mathbb{R}$

7. $\alpha : (x,y,z) = (1,1,0) + k_1(1,-2,1) + k_2(-1,6,-2)$, $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

8. $y = 2 \wedge z = 6$

9. a) $a = 2 \wedge b = -3$

b) $a = \frac{7}{2}, \forall b$

c) $a = 1 \wedge b = -1$

d) $a = -2 \wedge b = -1$

e) $a = 0 \wedge b = 2$

10.

a) $\beta : x + 3y - z = 4$, por exemplo
b) $\gamma : x + y + 4z = 1$, por exemplo
c) $r : (x, y, z) = (1, 1, 1) + k\,(1, 1, 4)\,,\ \forall k \in \mathbb{R}$, por exemplo
d) $s : (x, y, z) = (1, 1, 1) + k\,(1, 3, -1)\,,\ \forall k \in \mathbb{R}$, por exemplo

11. $\pi : x + \sqrt{2}y + z = 2\sqrt{2}$

12.

a) Sim. O plano $y = 1$ é paralelo ao plano XOZ
b) $\alpha : 2x - 9y - z = -8$
c) $\beta : y = 0$

13.

a) $a = -3 \wedge b = 4$
b) $a = 2,\ \forall b$

14.

a) Sim. $\alpha : -7x + y - 3z = -2$
b) Sim. $\beta : x - 2z = 1$

15.

a) Não, podem pertencer a planos distintos
b) Sim
c) Não
d) Não, em retas enviesadas tal não se verifica
e) Sim

16.

a) $t_1 : (x, y, z) = (-1, 2, 0) + k\,(1, 3, -2)\,,\ \forall k \in \mathbb{R}$
b) $t_2 : (x, y, z) = (-1, 2, 0) + k\,(1, 0, 0)\,,\ \forall k \in \mathbb{R}$
c) $t_3 : (x, y, z) = (-1, 2, 0) + k\,(1, 1, 2)\,,\ \forall k \in \mathbb{R}$, por exemplo
d) $t_4 : (x, y, z) = (1, 1, 7) + k\,(-1, 1, 1)\,,\ \forall k \in \mathbb{R}$, por exemplo
e) $t_5 : (x, y, z) = (-1, 2, 0) + k\,(4, 1, 1)\,,\ \forall k \in \mathbb{R}$, por exemplo
f) $t_6 : (x, y, z) = (-1, 2, 0) + k\,(-1, 3, 4)\,,\ \forall k \in \mathbb{R}$, por exemplo
g) $t_7 : (x, y, z) = (1, 0, 0) + k\left(-\frac{1}{9}, -\frac{14}{9}, 1\right)\,,\ \forall k \in \mathbb{R}$
h) $t_8 : (x, y, z) = (-1, 2, 0) + k\left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\,,\ \forall k \in \mathbb{R}$

17.

a) $P_1P_2P_3 : (x, y, z) = (-1, 2, 0) + k_1\,(4, -4, 2) + k_2\,(-2, 0, 0)\,,\ \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ (equação vetorial), $P_1P_2P_3 : \begin{cases} x = & -1 + 4k_1 - 2k_2 \\ y = & 2 - 4k_1 \\ x = & 2k_1 \end{cases}, \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ (equações paramétricas) e $P_1P_2P_3 : y + 2z = 2$ (equação geral)

b) $r_1 : (x, y, z) = (1, -1, 1) + k\,(0, 1, 2)\,,\ \forall k \in \mathbb{R}$
c) $r_2 : (x, y, z) = (1, -1, 1) + k\,(1, 1, 0)\,,\ \forall k \in \mathbb{R}$
d) $r_3 : (x, y, z) = (1, -2, 2) + k\,(1, -2, 1)\,,\ \forall k \in \mathbb{R}$
e) $4_5 : (x, y, z) = (1, -1, 1) + k\,(1, -2, 1)\,,\ \forall k \in \mathbb{R}$, por exemplo
f) $r_5 : (x, y, z) = (0, 1, 0) + k\,(1, -2, 1)\,,\ \forall k \in \mathbb{R}$, por exemplo
g) $r_6 : (x, y, z) = (-1, 2, 0) + k\,(1, -2, 1)\,,\ \forall k \in \mathbb{R}$, por exemplo
h) $r_7 : (x, y, z) = (-1, 2, 0) + k\,(-1, 2, 1)\,,\ \forall k \in \mathbb{R}$, por exemplo
i) $r_8 : (x, y, z) = (0, 0, 1) + k\,(2, 0, 1)\,,\ \forall k \in \mathbb{R}$, por exemplo
j) $r_9 : (x, y, z) = (-1, 2, 0) + k\,(1, -2, 1)\,,\ \forall k \in \mathbb{R}$, por exemplo
k) $r_{10} : (x, y, z) = (3, -2, 2) + k\,(1, -2, 1)\,,\ \forall k \in \mathbb{R}$, por exemplo

18.

a) $\beta_1 : y + 2z = 1$
b) $\beta_2 : x - y + 2z = 4$
c) $\beta_3 : 5x + 4y - 2z = 3$
d) $\beta_4 : 7x + 4y - 3z = 0$
e) $\beta_5 : x - 2y + z = 4$

19.

a) $\beta_1 : x + y = 0$
b) $\beta_2 : x - 2z = -1$
c) $\beta_3 : 2x - y - 6z = 5$
d) $\beta_4 : y + 2z = 1$
e) $\beta_5 : 2x - 2y + z = 5$
f) $\beta_6 : 2x - 2y + z = 3$

20.

a) $\gamma_1 : x - 2y - z = -3$
b) $\gamma_2 : x + y - z = 1 \ \vee\ \gamma_2 : x - 8y + 2z = 1$
c) $\gamma_3 : y + z = 2$
d) $\gamma_4 : x + y - z = 3$ e $\gamma_5 : x + y - z = 0$
e) $\gamma_6 : x - 2y + 2z = 1$

21.

a) Os planos são concorrentes e intersetam-se na reta
$r : (x, y, z) = (0, -1, 0) + k\,(2, 3, 1)\,,\ \forall k \in \mathbb{R}$
b) Os planos são concorrentes e intersetam-se na reta
$r : (x, y, z) = \left(\frac{20}{3}, -\frac{4}{3}, 0\right) + k\left(-\frac{5}{9}, -\frac{2}{9}, 1\right),\ \forall k \in \mathbb{R}$
c) Os planos são concorrentes intersetam-se no ponto $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)$
d) Os planos são concorrentes e intersetam-se na reta
$r : (x, y, z) = (-1, 0, 0) + k\,(5, 3, 1)\,,\ \forall k \in \mathbb{R}$

e) Os planos α e γ são coincidentes e ambos intersetam o plano β na reta $r : (x, y, z) = \left(\frac{6}{7}, -\frac{3}{7}, 0\right) + k\left(-\frac{60}{7}, \frac{16}{7}, 1\right)$, $\forall k \in \mathbb{R}$

f) Os três planos não se intersetam. Os planos α e γ são paralelos e ambos concorrentes com o plano β

g) Os três planos não se intersetam. Os planos α e γ são coincidentes e ambos paralelos ao plano β

22.

a) As retas não se intersetam. São paralelas

b) As retas são concorrentes intersetam-se no ponto $I\,(4, 3, 9)$

c) As retas são perpendiculares e intersetam-se no ponto $I\,(-1, 1, 0)$

d) As retas não se intersetam. São enviesadas

23.

a) A reta é perpendicular ao plano

b) A reta interseta o plano no ponto $I\,(-5, -4, -2)$

c) A reta é paralela ao plano

d) A reta está contida no plano

24.

a) $k \neq 1$

b) Não acontece

c) k = 1

25.

a) $\lambda = -1/2$ e $k \neq 0$

b) Para quaisquer λ e k

c) Impossível

26.

a) $\arccos\left(\frac{2}{3}\right)$

b) $\arccos\left(\frac{27}{\sqrt{1113}}\right)$

c) $\arcsin\left(\frac{5}{\sqrt{106}}\right)$

d) 1

e) $\frac{\sqrt{2100}}{21}$

27.

a) $K = 1 \vee K = 2$

b) Não existem

28.

a) $P'\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

b) $P'\left(\frac{719}{200}, \frac{54}{25}, 1\right)$

c) $r' : (x, y, z) = (0, -2, -1) + k\,(1, 1, 9)\,,\ \forall k \in \mathbb{R}$

29.

a) $A\left(0, 0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, $B(0, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$, $E\left(\frac{-4\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ e $F\left(\frac{-4\sqrt{3}}{3}, 0, 0\right)$.

b) $z = 0$

c) $(x, y, z) = \left(\frac{-4\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) + k\left(0, 2, \frac{-2\sqrt{3}}{3}\right)$

d) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

30.

a) $x + 2y + z - 4 = 0$

b) $(x, y, z) = (0, 0, 0) + k(1, 2, 1),\ \forall k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

31.

a) $A(0, 0, 3)$, $C(-2, 3\sqrt{3}, 0)$, $D(2, -3\sqrt{3}, 0)$ e $E(2, 3\sqrt{3}, 0)$.

b) $2x + 2y - 3z + 8 = 0$

c) $(x, y, z) = (2, 2, 0) + k(-2, 2, -3),\ \forall k \in \mathbb{R}$

d) $\frac{\sqrt{3536}}{17}$

32.

a) $\sqrt{11}\ u.d.$

b) $\frac{8}{9}\sqrt{29}\ u.d.$

c) $\frac{1}{3}\ u.d.$

33.

a) $\frac{73}{131}\sqrt{131}\ u.d.$

b) $\frac{6}{7}\sqrt{14}\ u.d.$

c) $\frac{\sqrt{3}}{3}\ u.d.$

34.

a) $P_1\,(0, 2, -2)$ e $P_2\,(2, 0, 2)$

b) $P\left(-\frac{3}{2}, 0, 0\right)$

35.

a) Plano $\pi : x - y + 2z = -2$

b) Reta $r : (x, y, z) = (10, 18, 0) + k(11, 9, 1)),\ \forall k \in \mathbb{R}$

c) Circunferência de centro $C(1, 2)$ e raio $r = \sqrt{10}$

d) Esfera de centro $C(1, 2, 1)$ e raio $r = 2$

36.

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}\ u.a.$ b) $D(1, 2, -2)$ c) $h = \sqrt{6}$

37. $A_{ABCD} = \frac{9}{2}$

38.

a) b) $D(-1, 0, -1) \vee D(5, 0, -1)$ c) $\acute{A}rea = 6$, $Per\acute{i}metro = 10$

APÊNDICE

A

Breve introdução ao MATLAB

O MATLAB é uma *package* destinada ao estudo de problemas em que haja um trabalho computacional significativo que necessite de utilizar matrizes. Este *software* é produzido por uma companhia americana, The MathWorks, Inc. e o seu nome deriva do inglês "*matrix laboratory*". Está implementado sobre um conjunto de algoritmos de baixo nível, o que lhe confere grande rapidez de cálculo, e inclui uma grande variedade de capacidades gráficas. Sobre o programa base é possível adicionar um elevado conjunto de ferramentas, desenvolvidas para fins específicos e produzidos quer pela MathWorks, quer por terceiros. A grande versatilidade do programa deve-se à sua linguagem de programação que possui uma sintaxe mais simples que a maioria das linguagens de programação e tem uma curva de aprendizagem mais curta.

A.1. Iniciar uma sessão em MATLAB

Independentemente da versão que se utiliza, o MATLAB possui uma interface composta por várias janelas aninhadas na janela principal do programa, sendo a mais importante designada por "`command window`". O programa funciona em linha de comando e o duplo símbolo "`>>`" é o indicador de início de linha de comando, sendo o resultado ou eco apresentado nas linhas imediatamente abaixo sem o indicador de linha de comando.

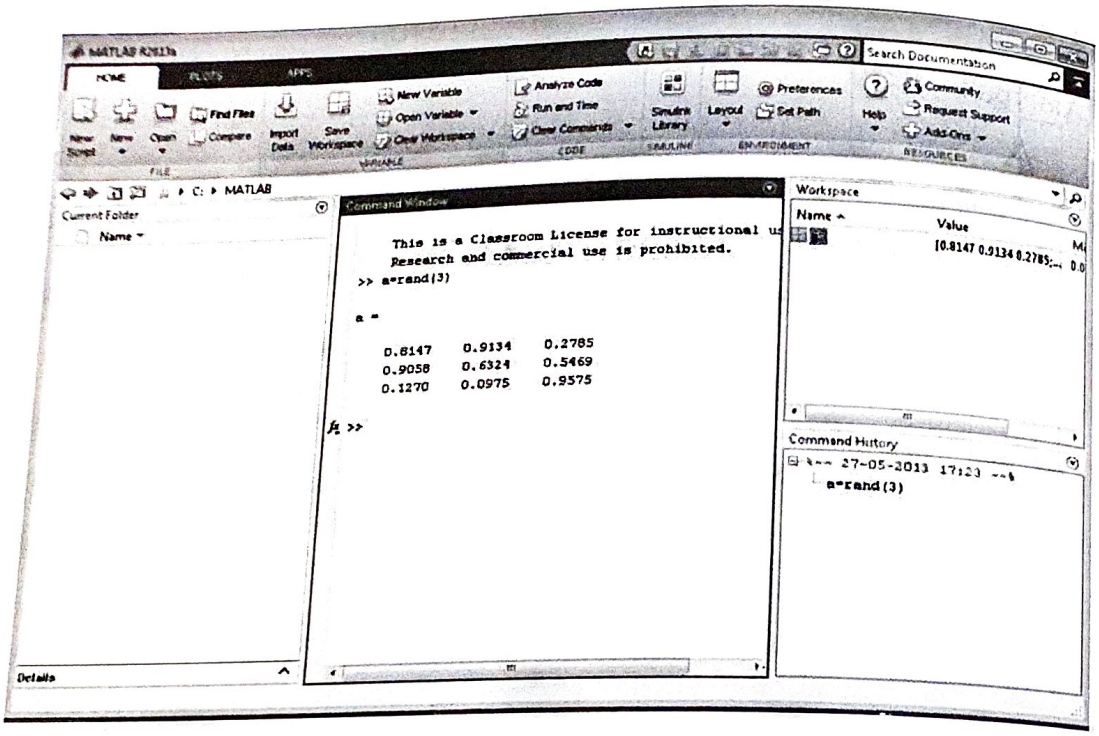


Figura A.1.: Interface do MATLAB, versão R2013a.

Para guardar o texto de uma sessão de trabalho num ficheiro com o nome, por exemplo, `sessao.txt`, deve-se utilizar, no início da sessão, o comando `diary`.

```
>> diary sessao.txt
```

No final da sessão, deve-se utilizar o comando `diary off`.

```
>> diary off
```

Será guardado um ficheiro texto na pasta de trabalho atual.

Para aceder ao ficheiro, iniciar o MATLAB e abrir o ficheiro através do menu `[File -> Open]`, mas este pode ser aberto ou editado com qualquer editor de texto.

A.2. Ambiente MATLAB

- ***Command Window*** - É nesta janela que se trabalha. A janela de comando do MATLAB possui algumas potencialidades na apresentação dos resultados, gestão da variáveis, formatação numérica dos resultados, edição da linha de comandos, etc.

- ***Command History*** – apresenta os últimos resultados, comandos, ...
- ***Current Folder***
- ***Workspace*** – variáveis com que se está a trabalhar.

A.2.1. Gestão de variáveis

- As variáveis do MATLAB são guardadas na "área de trabalho" (*workspace*).
- Para visualizar as variáveis que estão na "área de trabalho" num dado momento, podem-se utilizar os comados `who` e `whos`. O primeiro apresenta no ecrã uma lista abreviada das variáveis, indicando apenas o seu nome, enquanto que o segundo apresenta também o espaço ocupado em memória, dimensão, etc.
- Para apagar variáveis da memória pode-se utilizar o comando `clear`. Para apagar, por exemplo, a variável `x`, faz-se "`clear x`". O comando `clear` sem argumentos apaga todas as variáveis armazenadas em memória.

A.2.2. Menu e o comando *help*

Quando se pretende informação sobre uma dada função ou comando, deve-se recorrer ao menu Help ou, em alternativa, o utilizar o comando `help`. Por exemplo, para a função `exp`

```
>> help exp
EXP    Exponential.
    EXP(X) is the exponential of the elements of X, e to the X.
    For complex Z=X+i*Y, EXP(Z) = EXP(X)*(COS(Y)+i*SIN(Y)).
    See also expm1, log, log10, expm, expint.
    Reference page in Help browser doc exp
```

Para obter uma lista de funções na janela de comandos, utiliza-se o comando `help matfun`

```
>> help matfun
  Matrix functions - numerical linear algebra.
  Matrix analysis.
    norm         - Matrix or vector norm.
      ⋮
```

Para obter uma lista de funções noutra janela, fazer `helpwin`

```
>> helpwin
```

A.2.3. O comando *lookfor*

Quando se pretende encontrar uma função para resolver um problema, mas se desconhece se existe alguma adequada no MATLAB, o comando `lookfor` permite pesquisar as primeiras linhas do `help` de todas funções instaladas no MATLAB.

```
>> lookfor inverse
invsigm                 - Inverse sigmoid map
invhilb                 - Inverse Hilbert matrix.
...
```

Procura todas as funções em que a palavra `inverse` aparece na 1ª linha do `help`. Esta pesquisa é adequada para resolver a maior parte das situações, uma vez que a primeira linha do `help` de uma função contém sempre uma descrição sumária da sua funcionalidade.

```
>> lookfor -all inverse
haltonset:      RR2       - A permutation of the radical ...
paretotails:    by inverse interpolation, and to define ...
...
```

Procura todas as funções em que a palavra `inverse` aparece em qualquer linha do `help`.

A.3. Expressões

O MATLAB permite a construção de expressões matemáticas sem qualquer declaração do formato numérico ou dimensão das matrizes. Existem quatro constituintes básicos nas expressões do MATLAB:

- Variáveis
- Números
- Operadores
- Funções

A.3.1. Variáveis e constantes pré-definidas

Existem algumas variáveis e constantes pré-definidas que são intrínsecas ao MATLAB e que não podem ser apagadas.

Tabela A.1.: Algumas variáveis do MATLAB.

Variável	Descrição
`ans`	Resposta mais recente, que não foi atribuída a nenhuma variável
`eps`	Precisão da máquina
`realmax`	Maior número de ponto flutuante
`realmin`	Menor número de ponto flutuante
`pi`	3,14159265358979
`i, j`	Unidade imaginária
`flops`	Contador de operações matemáticas
`NaN`	Not a Number (indeterminação)
`Inf`	Infinito
`computer`	Tipo de computador
`version`	Versão do MATLAB
	...

Existe uma variável especial que é utilizada pelo MATLAB quando não se atribui o resultado de uma expressão a qualquer variável. Esta variável designa-se por "`ans`" (do termo *answer*, resposta) e pode ser utilizada numa sessão interativa para continuação dos cálculos, tal como o exemplo seguinte ilustra.

```
>> 2*4+5
ans =
     13
>> ans*2
ans =
     26
>>
```

Todas as variáveis do MATLAB são do tipo matriz e a sua criação é automática. Por exemplo,

```
>> a=2*4+5
a =
    13
>>
```

A.3.2. Declarações e variáveis

- O nome de uma variável deve começar sempre por uma letra, seguido de um conjunto de letras, números ou o sinal _ , até ao máximo de 19 caracteres.
- O MATLAB distingue as letras maiúsculas das letras minúsculas.
- Todas as funções têm nomes escritos em minúsculas.
- O sinal de atribuição é o símbolo "=".
- Sempre que se pretenda que o resultado de uma operação não apareça no ecrã, deve-se terminar a linha com o símbolo ";".

Assim, nos dois comandos seguintes,

```
>> x=2*4+5
x =
    13
>> x=2*4+5;
>>
```

atribui-se à variável `x` o valor 13, mas o último não mostra no monitor o resultado dessa atribuição.

A.4. Números e operadores

- O MATLAB utiliza uma notação *standard* para a representação dos números, admitindo notação científica e números complexos.
- A unidade imaginária $j = \sqrt{-1}$ é representada no MATLAB pelas letras `i` ou `j`.
- As operações nas expressões do MATLAB seguem as regras habituais de precedência e podem ser aplicadas quer a matrizes quer a números.

A.5. Funções

- O MATLAB possui um conjunto muito grande de funções matemáticas que permitem resolver grande parte dos problemas de cálculo encontrados, tais como `sin`, `cos`, `tan`, `sqrt`, `log`, etc.

- Estas aceitam números complexos como argumento e podem também devolver resultados do tipo complexo. Se, por exemplo, se calcular a raiz quadrada de um número negativo, não ocorre um erro, mas o correspondente número complexo é automaticamente devolvido.
- Quando as funções são aplicadas sobre matrizes, a função é aplicada a cada um dos elementos.

A.6. Expressões

Na construção de expressões, podem-se utilizar operadores, funções e variáveis. Eis alguns exemplos:

```
>> r=(pi+1)/(pi-1)
r =
    1.9339
>> a=abs(4+3i)
a =
    5
>> t=angle(4+3i)
t =
    0.6435
>> a=0/0
a =
    NaN
>> x=sqrt(-2)
x =
    0 + 1.4142i
>> x=log(-1)
x =
    0 + 3.1416i
>>
```

Um comentário pode ser colocado no fim da linha ou numa linha independente desde que seja precedido do símbolo de "%".

A.6.1. Formatação da saída

O comando `format` controla a forma como os valores numéricos são apresentados. Este comando controla apenas a forma com os valores são apresentados e não a forma como estes são representados internamente.

Por defeito, a apresentação dos resultados é com 4 casas decimais.

Tabela A.2.: Comando *Format*.

Comando	Descrição
`format short e`	notação científica com 4 casas decimais
`format long e`	notação científica com 15 casas decimais
`format hex`	formato hexadecimal
`format bank`	2 casas decimais
`format rat`	formato racional
`format compact`	elimina as linhas em branco extra introduzidas entre a apresentação das variáveis, permitindo uma apresentação dos resultados mais compacta.
	...

A.7. Matrizes

- O MATLAB trabalha essencialmente com matrizes, os escalares são entendidos como matrizes 1×1 e os vetores como matrizes $1 \times n$ ou $n \times 1$.
- Para definir uma matriz (pequena), podem introduzir-se os seus elementos da seguinte forma
  - Introduzir a matriz por linhas, introduzindo "[" no início e "]" no final
  - Cada elemento da mesma linha é separado por "," ou por um espaço
  - Cada linha é separada por ";" ou por mudança de linha

```
>> A = [1,1,1;2,2,2;3,3,3]
A =
     1     1     1
     2     2     2
     3     3     3
>>
```

A.7.1. O símbolo " : "

O símbolo ":" permite definir vetores/matrizes de uma forma muito simples.

`vetor=(lim inf : passo : lim sup)`

```
>> format short
>> x=-2:1:4 % tem como resposta
x =
    -2    -1     0     1     2     3     4

>>
>> x=-2:1.5:4 % tem como resposta
x =
   -2.0000   -0.5000    1.0000    2.5000    4.0000

>>
>> x=4:-1:0
x =
     4     3     2     1     0

>>
>> format rat
>> X=[-2:2:4;1:1.5:6;9:-3:0;2:-0.6:0] % matriz de 4ª ordem
X =  -2        0        2        4
      1      5/2        4     11/2
      9        6        3        0
      2      7/5      4/5      1/5
>>
```

A.7.2. Manipulação de matrizes

Para obter um elemento da matriz, basta indicar a sua linha e a sua coluna.
Assim, por exemplo, para atribuir à variável x o valor do elemento que está na 2ª linha e na 3ª coluna da matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ tem-se o *script*

Figura A.2.:

```
>> A=[1 1 1; 2 2 2; 3 3 3];
>> x=A(2,3) % tem como resposta
x =
     2
>>
```

Para alterar um elemento da matriz, basta indicar a sua linha e a sua coluna e o seu novo valor. No *script* seguinte exemplifica-se como alterar o valor do elemento que está na 2ª linha e na 3ª coluna da matriz **A** do *script* anterior.

```
>> A(2,3)=4 % alterar o valor de um termo
A =
     1     1     1
     2     2     4
     3     3     3
>>
```

Em MATLAB não é necessário dimensionar *a priori* as matrizes; o redimensionamento é feito a cada nova instrução.

O *script* seguinte redimensiona a matriz **A** para poder albergar o elemento `A(4,5)=4`.

```
>> A(4,5)=4
A =
     1     1     1     0     0
     2     2     4     0     0
     3     3     3     0     0
     0     0     0     0     4
>>
```

Também é possível eliminar uma ou várias linhas ou colunas de uma matriz, assim como inserir novas filas com os elementos pretendidos. O *script* seguinte, aplicado sobre **A**, exemplifica como proceder.

```
>> A(3:4,:)=[] % elimina as linhas 3 e 4
A =
     1     1     1     0     0
     2     2     4     0     0
>> A(:,3:end)=[] % elimina da 3ª coluna à última
A =
     1     1
     2     2
>>
>> A(:,3)=5 % introduz a 3ª coluna com o valor 5
A =
     1     1     5
     2     2     5
>> A(3,:)=[5 4 3] % introduz a 3ª linha de valores [5 4 3]
A =
     1     1     5
     2     2     5
     5     4     3
>>
```

Submatrizes

Para obter uma submatriz de uma matriz dada, devem-se indicar as linhas e colunas que se pretendem dessa matriz.

O *script* seguinte mostra como obter algumas submatrizes da matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}.$$

```
>> B=[1 2 3 4; 5 6 7 8; 9 10 11 12; 13 14 15 16] % matriz B
B =
    1     2     3     4
    5     6     7     8
    9    10    11    12
   13    14    15    16
>> X=B(2:3,1:3) % submatriz com as linhas 2 e 3 e colunas 1 a 3
X =
    5     6     7
    9    10    11
>> Y=B(:,2:3) % submatriz das colunas 2 e 3
Y =
    2     3
    6     7
   10    11
   14    15
>> Z=B(2:3,:) % submatriz das linhas 2 e 3
Z =
    5     6     7     8
    9    10    11    12
>>
```

A.7.3. Operações com matrizes

Matriz transposta

A matriz transposta de uma matriz é obtida com o símbolo " ' " aposto à matriz que se pretende transpor.

```
>> B' % a transposta da matriz B do script anterior
ans =
     1     5     9    13
     2     6    10    14
     3     7    11    15
     4     8    12    16
>>
>> x=[1 2 3] % a matriz linha
x =
     1     2     3
>> x' % tem a transposta
ans =
     1
     2
     3
>>
```

Soma e subtração

A soma e subtração usuais de matrizes efetuam-se com os operadores habituais, símbolos " + " e " - " . A adição de uma constante a uma matriz é efetuada sobre todos os elementos dessa matriz.

```
>> A=[1 2 3; 5 6 7; 9 10 11];    % matrizes A e
>> B=[1 3 4; 9 11 12; 13 15 16]; % B de ordem 3
>> A+B % soma
ans =
     2     5     7
    14    17    19
    22    25    27
>> A-B % subtração
ans =
     0    -1    -1
    -4    -5    -5
    -4    -5    -5
>> A+7 % adicionar uma constante
ans =
     8     9    10
    12    13    14
    16    17    18
>>
```

Produto

O produto usual de matrizes é obtido com o operador notado pelo símbolo "*". Se um dos fatores for uma constante, todos os elementos da matriz são multiplicados por essa constante.

```
>> A=[1 1 0; 2 2 1; 3 3 1] % matriz A de ordem 3
B =
     1     1     0
     2     2     1
     3     3     1

>>
>> 2*A % produto por uma constante
ans =
     2     2     0
     4     4     2
     6     6     2

>>
```

Se os fatores forem matrizes, a operação é efetuada se for possível; caso não seja, o sistema gera uma mensagem de erro.

```
>> A=[1:1:3; 2:2:6; 3:3:9] % matriz A de ordem 3
A =
     1     2     3
     2     4     6
     3     6     9
>> B=[1 1; 2 2; 3 3] % matriz B de ordem 3x2
B =
     1     1
     2     2
     3     3
>>
>> A*B % produto A*B é possível
ans =
    14    14
    28    28
    42    42
>> B*A % mas B*A não é
??? Error using ==> mtimes
Inner matrix dimensions must agree.
>>
```

Obviamente, também é possível fazer qualquer operação algébrica mais complexa entre matrizes, ou com submatrizes, desde que a operação seja possível.

```
>> X=A*B-5*B % cálculo AB-5B
X =
     9     9
    18    18
    27    27
>>
>> a=A(3,:), b=B(:,2), a*b
a =
     3     6     9
b =
     1
     2
     3
ans =
    42
>>
```

Potência

As potências de uma matriz calculam-se com o operador de símbolo "^".

- A^2 = A*A;
- A^3 = A*A*A, ...

```
>> A=[1 2 3;2 4 6; 3 6 9];
>> B=A^2
B =
    14    28    42
    28    56    84
    42    84   126
>>
```

Quociente

O MATLAB possui dois operadores, "\" e "/", habitualmente associados à operação de "divisão" mas, no caso de matrizes, corresponde de facto ao produto com a matriz inversa do 1º operando. Assim,

- $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{B}$
- $\mathbf{A}/\mathbf{B} = \mathbf{B} \times \mathbf{A}^{-1}$

Geralmente, não se calcula a inversa de $\mathbf{A}$ e resolve-se o sistema associado. Assim,

- $\mathbf{X} = \mathbf{A} \setminus \mathbf{B}$ é a solução de $\mathbf{A} \times \mathbf{X} = \mathbf{B}$
- $\mathbf{X} = \mathbf{A}/\mathbf{B}$ é a solução de $\mathbf{X} \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$

```
>> format rat
>> A=[1 2 0; 4 5 6; 7 8 9];
>> B=[3 6 3; 9 9 6; 6 6 6];
>> X=A\B % solução do problema A X = B
X =
   -11    -12    -5
     7      9     4
     3      2     1
>> Y=A/B % solução do problema X A = B
Y =
   1/3    1/3  -1/2
   1/3   -2/3   3/2
   1/3   -2/3     2
>>
```

Operações elemento a elemento

As operações elemento a elemento diferem das operações usuais de matrizes. Em termos computacionais são úteis por facilitarem tarefas que envolvem processamento de dados em listas, por exemplo, e que habitualmente obrigariam ao uso de ciclos, sendo desta forma desnecessários.

- Para indicar que uma operação é feita elemento a elemento, deve usar-se o ponto "." imediatamente antes do operador.

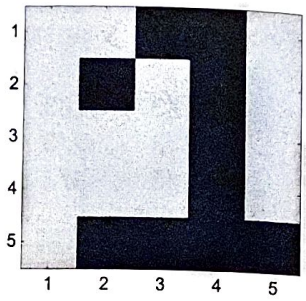
  A.^B , A .* B , A ./ B , A .\ B
- Não estão definidas A.+B, nem A.-B

```
>> format rat
>> A=[1 2; 3 4];
>> B=[1 -1; 2 3];
>>
>> P1=A.*B % [p1(i,j)]=[a(i,j)*b(i,j)]
P1 =
    1    -2
    6    12
>> P2=A.^B % [p2(i,j)]=[a(i,j)^b(i,j)]
P2 =
    1   1/2
    9    64
>> D1=A./B % [d1(i,j)]=[a(i,j)/b(i,j)]
D1 =
      1    -2
    3/2   4/3
>>
```

As matrizes e a imagem

A visualização dos elementos das matrizes sob diversas formas é útil em diversas áreas do conhecimento. Por exemplo, as imagens digitais são tratadas como matrizes, em que cada pixel da imagem corresponde a um elemento da matriz. Os próprios caracteres no monitor são matrizes. O MATLAB possui comandos adequados para visualizar uma matriz como imagem, como o `imagesc`.

```
>> A=[0 0 1 1 0; % criar um "1"
0 1 0 1 0;
0 0 0 1 0;
0 0 0 1 0;
0 1 1 1 1];
>> imagesc(A) % visualizar a matriz
>>
```



Matrizes especiais

O MATLAB tem muitas matrizes definidas por defeito, destinadas aos mais diversos fins. Podem-se ver alguns exemplos na tabela seguinte.

Tabela A.3.: Algumas matrizes do MATLAB.

Variável	Descrição
`eye(n)`	matriz identidade de tipo $n \times n$
`eye(m,n)=eye([m,n])`	matriz de tipo $m \times n$ com os elementos da diagonal iguais a um e todos os outros nulos
`eye(size(A))`	matriz com a mesma dimensão da matriz **A** que tem os elementos da diagonal iguais a um e todos os outros nulos
`zeros(n)`	matriz nula de tipo $m \times n$
`zeros(m,n)`	matriz de tipo $m \times n$ com todos os elementos nulos
`zeros(size(A) )`	matriz nula com a mesma dimensão da matriz **A**
`ones(n)`	matriz constante com todos os elementos iguais a um
`ones(m,n)`	matriz de tipo $m \times n$ com todos os elementos iguais a um
`ones(size(A) )`	matriz com a mesma dimensão da matriz **A** que tem todos os elementos iguais a um

...

Outros comandos que podem ser úteis na criação de matrizes seguem-se na tabela seguinte.

Tabela A.4.: Algumas matrizes do MATLAB.

Variável	Descrição
`magic(n)`	matriz de ordem n de inteiros entre 1 e n^2 com soma igual nas filas e nas diagonais
`rand(m,n)`	matriz do tipo $m \times n$ de números aleatórios entre 0 e 1 com distribuição uniforme
`randn(m,n)`	matriz do tipo $m \times n$ de números aleatórios com distribuição normal, $N(0,1)$
	...

Manipulação e análise de matrizes

Por defeito, as funções matemáticas definidas no MATLAB operam sobre os elementos de uma matriz. O MATLAB tem, no entanto, muitas funções definidas por defeito para manipular matrizes. Podem-se ver alguns exemplos na seguinte tabela.

Tabela A.5.: Funções para manipular matrizes no MATLAB.

Variável	Descrição
`diag`	criar ou extrair diagonais
`tril`	extrair parte triangular inferior
`triu`	extrair parte triangular superior
`cond`	número de condição da matriz
`rank`	característica da matriz
`det`	determinante da matriz
`trace`	traço da matriz
	...

```
>> A=[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9];
>> diagonal=diag(A)
diagonal =
     1
     5
     9
>> triq_inferior=tril(A)
triq_inferior =
     1     0     0
     4     5     0
     7     8     9
>> triq_superior=triu(A)
ts =
     1     2     3
     0     5     6
     0     0     9
>> caracteristica=rank(A)
caracteristica =
     2
>> determinante=det(A)
determinante =
     0
>> traco=trace(A)
traco =
    15
>>
```

A.7.4. Polinómios

A definição de polinómios é feita criando vetores cujos elementos são os coeficientes do polinómio ordenados por potência decrescente. Por exemplo, para representar o polinómio $p(x) = x^2 - 3x + 2$, criamos o vetor `p=[-1 -3 2]`.

Existe no ambiente MATLAB um conjunto de funções para manipular polinómios. Alguns desses comandos encontram-se listados na tabela A.6.

Tabela A.5: Funções para manipular polinómios no MATLAB.

Variável	Descrição
roots(c)	determina as raízes do polinómio $p = c(1)x^n + \ldots + c(n)*x + c(n+1)$ cujos coeficientes são os elementos do vector c
poly(c)	dadas as raízes, c, constrói o polinómio, p
polyval(p,c)	calcula o valor do polinómio em c
polyder(c)	derivada de um polinómio
conv(p, z)	produto de polinómios
deconv(p, z)	divisão de polinómios
...	

```
>> p=[1 -3 2] % coeficientes do polinómio p
p =
     1    -3     2
>> r=roots(p) % raízes do polinómio
r =
     2
     1
>> r=[2 1]; % raízes de um polinómio
>> p=poly(r) % determina o polinómio a partir das raízes
p =
     1    -3     2
>> polyval(p,r) % determina o valor de p num conjunto de pontos
ans =
     0     0
>>
```

O produto entre dois polinómios é obtido através da função `conv` (convolução, mas não confundir com a convolução funcional). O *script* seguinte mostra a aplicação deste comando na determinação do produto entre os polinómios $x^2 + 1$ e $x^3 + x - 1$ cujo resultado é $x^5 + 2x^3 - x^2 + x - 1$.

```
>> p1=[1 0 1];
>> p2=[1 0 1 -1];
>> conv(p1,p2) % produto entre p1 e p2
ans =
     1     0     2    -1     1    -1
>> dp2=polyder(p2) % derivada de P2
dp2 =
     3     0     1
>> produto=conv(p1,dp2) % produto entre p1 e dp2
produto =
     3     0     4     0     1
>> r=deconv(produto,dp2) % divisão com dp2
r =
     1     0     1
>>
```

A.8. *Scripts* e funções

Um *script* é um ficheiro que contém uma sequência de comandos MATLAB. Quando o *script* é invocado, o MATLAB executa os comandos encontrados no ficheiro e as variáveis que aparecem no *script* são globais.

Uma função é um ficheiro que contém uma sequência de comandos MATLAB mas que tem a palavra `function` no início da primeira linha. As funções diferem de *scripts* na medida em que podem ser usados argumentos e as variáveis definidas e manipuladas dentro da função são locais.

Um função é definida do seguinte modo:

```
function [parâmetros_saida] = nome_função(parâmetros_entrada)
```

A.8.1. Sistema Algébrico Computacional

O MATLAB tem ferramentas que permitem algum tipo de cálculo algébrico ou simbólico vulgarmente atribuido a sistemas algébricos computacionais (CAS). Antes de se efetuar qualquer operação simbólica, onde se tem x, y ou qualquer outra letra como variável, é preciso definir essas variáveis como simbólicas. Para isso usa-se o comando `syms`.

```
>> syms x y
```

Neste exemplo indica-se que x e y são variáveis simbólicas e não um número conhecido. O MATLAB realiza todas as operações elementares entre expressões simbólicas utilizando a sintaxe comum

```
>> syms x
>> x+3*x
ans =
     4*x
>> x*3*x+5*x-x
ans =
     3*x^2+4*x
>> sin(pi-x)
ans =
     sin(x)
>>
>> p=2*x*(2*x+2)-4*(x+1);
>> simplify(p) % simplifica a expressão
ans =
     4*x^2-4
>>
>> p=2*x*(2*x+2)-4*(x+1);
>> factor(p) % factoriza a expressão
ans =
     4*(x - 1)*(x + 1)
>>
>> p=(x-1)^2;
>> expand(p) % expande as operações
ans =
     x^2 - 2*x + 1
>>
```

Para substituir uma variável numa expressão simbólica, o MATLAB possui o comando `subs`. A forma de o utilizar é

```
subs(expressão, variável, valor)
```

```
>> syms x
>> subs(4*x^2-4, x, 2)
ans =
     12
```

Um problema bastante comum quando se trabalha com variáveis é a resolução de equações. Para este problema existe no MATLAB o comando `solve` cuja sintaxe é

```
solve(equações, variáveis)
```

Assim, para calcular as soluções da equação $x^2 - 2x + 1 = 0$, tem-se

```
>> syms x
>> solve(x^2-2*x+1==0,x) % ou simplesmente solve(x^2-2*x+1)
ans =
     1
     1
```

A.9. Gráficos

O comando mais simples para fazer gráficos é o comando `plot` de sintaxe

```
plot(abcissas, ordenadas, 'estilo')
```

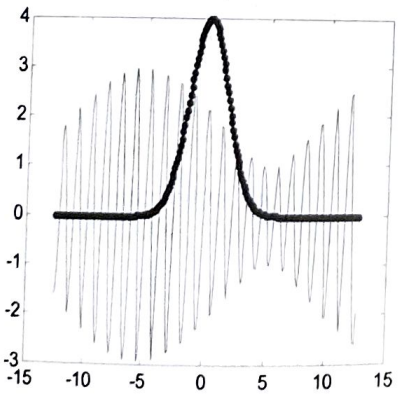
onde `abcissas` e `ordenadas` são vetores com a mesma dimensão que contêm as abcissas e ordenadas dos pontos do gráfico e `estilo` é um argumento opcional que especifica o estilo da linha ou ponto a desenhar.

Tabela A.7.: Opções para o estilo do gráfico.

Cor		Tipo de ponto		Tipo de linha	
amarela	y	ponto	.	contínua	-
magenta	m	círculo	o	ponteada	:
ciano	c	cruz	x	traço-ponto	-.
vermelha	r	mais	+	tracejada	--
verde	g	estrela	*		
azul	b	quadrado	s		
branca	w	losango	d		
preta	k	triângulo	v		

O *script* seguinte mostra como obter o gráfico das funções $f(x) = \sin(5x) + 2\cos(5.3x)$ e $g(x) = 4\exp\left(-\frac{x^2}{5}\right)$ no intervalo $[-4\pi, 4\pi]$.

```
>> % abcissas
>> x=-4*pi:0.1:4*pi;
>> % y=f(x)
>> y=sin(5*x)+2*cos(5.3*x);
>> % z=g(x)
>> z=4*exp(-x.^2/5);
>> plot(x,y,'-k',x,z,'.b')
>>
```



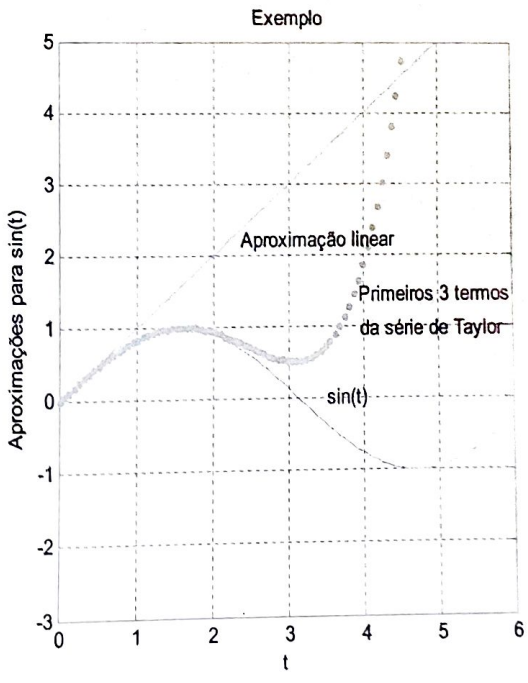
Para colocar um título, legenda, ou outra informação nos gráficos, usam-se os comandos listados na tabela seguinte.

Tabela A.8.: Opções dos gráficos.

Comando	Descrição
`title('título')`	introduz título na parte superior do gráfico
`xlabel ('Nome-x')`	introduz Nome-x por baixo do eixo do xx
`ylabel ('Nome-y')`	introduz Nome-y ao lado do eixo do yy
`grid`	coloca uma quadrícula no gráfico
`text(x, y, 'texto')`	coloca texto na posição (x, y)
`gtext('texto')`	coloca texto numa posição a indicar com o rato
`legend('texto1', 'texto2')`	produz uma legenda com texto1 e texto2
`legend off`	retira a legenda
`axis([xmin xmax ymin ymax])`	limita os eixos

Para representar graficamente as funções $f(t) = \sin t$, $g(t) = t$ e $h(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!}$ com informação adicional sobre os gráficos, o *script* produz o gráfico da figura junta.

```
>> t=linspace(0,2*pi);
>> y1=sin(t);
>> y2=t;
>> y3=t-(t.^3)/6+(t.^5)/120;
>> plot(t,y1,'r', t,y2,'b-');
>> hold on, plot(t,y3,'go');
>> axis([0 6 -1 5]);
>> grid on;
>> xlabel('t');
>> T='Aproximações para sin(t)';
>> ylabel(T);
>> title('Exemplo')
>> text(3.5,0,'sin(t)')
>> gtext('Aproximação linear')
>> gtext('Primeiros 3 termos')
>> gtext('da série de Taylor')
```



Bibliografia

1. Agudo, F.R. Dias, *Introdução à Álgebra Linear e Geometria Analítica.* Livraria Escolar Editora, Lisboa, 1996.
2. Anton, H., Rorres, C. *Álgebra Linear com Aplicações*, Bookman, 2001.
3. Ávila, G., *Variáveis Complexas e Aplicações*, Livros Técnicos e Científicos, 2000.
4. Barnett, S., *Matrices: Methods and Applications*, Oxford University Press, United Kingdom, 1990.
5. Barbolla, R., Sanz, P., *Álgebra lineal y teoría de matrices*, Prentice Hall, 1998.
6. Bronson, R., *Matrizes*, McGraw-Hill Portugal, 1993.
7. Bronson, R., *Schaum's Outline of Theory and Problems of Matrix Operations*, McGraw-Hill, 1988.
8. Chapman, S.J., *MATLAB Programming for Engineers*, 4th edition. Brooks/Cole, 2008.
9. Dianat, S.A., Saber, E.S., *Advanced Linear Algebra for Engineers with MATLAB*, CRC Press, 2009.
10. Giraldes, E., Fernandes, V.H., e Marques Smith, M. Paula. *Curso de Álgebra Linear e Geometria Analítica.* McGraw-Hill, 1995.
11. Golub, G.H., Van-Loan, C.F., *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, 1989.
12. Halmos, P.R., *Finite Dimensional Vector Spaces*, Springer-Verlag, 1987.
13. Hauser Jr., A.A., *Variáveis Complexas com Aplicações à Física*, LTC–Livros Técnicos e Científicos, 1970.
14. Hill, D., Kolman, B., *Introdução à Álgebra Linear com Aplicações*, Livros Técnicos e Científicos Editora, 2006.
15. Horn, R.A., Johnson, C.R., *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1985.
16. Hill, D., Kolman, B., *Elementary Linear Algebra With Applications*, Pearson, 2008.
17. Lay, D.C., *Linear Algebra and Its Applications*, Pearson, 2012.
18. Lipschutz, S., Lipson, M., *Schaum's Outline of Linear Algebra*, McGraw-Hill, 2013.
19. Gregório e Ribeiro, L., Silva, C., *Álgebra Linear*, McGraw Hill, 1985.
20. Machado, João M.C., *Álgebra Linear e Geometria Analítica*, Edição do ISEP para uso interno, 1986.
21. Magalhães, Luís T., *Álgebra Linear como Introdução à Matemática Aplicada*, Texto Editora, 1998.
22. Meyer, Carl D., *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, 2000.
23. Monteiro, A.A, Teixeira Matos, I., *Álgebra – um Primeiro Curso*, Escolar Editora, 1995.

24. Nicholson, W.K., *Linear Algebra with Applications*, McGraw-Hill, 2009.
25. Rao, C.R., Mitra, S.K., *Generalized Inverse of Matrices and its Applications*, John Wiley, 1971.
26. Ribeiro, C.S., Reis, L., e Reis, S.S., *Álgebra Linear: Exercícios e Aplicações*, McGraw Hill, 1989.
27. Steinbruch, A., *Álgebra Linear e Geometria Analítica*, McGraw-Hill, 1979.
28. Steinbruch, A., Winterle, P., *Álgebra Linear*, Pearson, 2012.
29. Strang, G., *Introduction to Linear Algebra*, Wellesley-Cambridge Press, 2009.
30. Trefethen, L. N., Bau, D., *Numerical Linear Algebra*, SIAM, 1997.
31. *The Mathworks - Mathematics in Matlab, Using MATLAB Graphics*, MATLAB User's Guide, version R2013a.
32. *The Mathworks - Symbolic Math Toolbox for use with MATLAB*, MATLAB User's Guide, version R2013a.
33. *The Mathworks - Using MATLAB Graphics*, MATLAB User's Guide, version R2013a.

Publindústria, Edições Técnicas
Porto, 2013

Importado por:
Livraria Cultura S/A
CNPJ: 62.410.352/0023-88
Endereço: Papa João Paulo
I, 4006, Galpão 01.
Vila Aeroporto Guarulhos.
CEP: 07170-350
TEL.: (11)3170-4033
FAX (11)3285-4654

ÁLGEBRA MATRICIAL

MATLAB® *examples*

Conceitos, Exercícios e Aplicações

Ana C. Meira Castro
Ana Júlia Viamonte
António Varejão Sousa

Sobre o livro

Este livro pretende ser um documento onde a ligação entre a abordagem clássica da Álgebra Linear habitualmente encontrada na literatura e da Teoria de Matrizes seja apresentada de forma simples e rigorosa em simultâneo com a exposição de aplicações.

Conscientes da vastidão de possíveis caminhos a seguir na apresentação das matérias inerentes à Álgebra e ao Cálculo Matricial, os autores optaram por seguir uma orientação que tivesse em linha de conta a atual tendência para a diminuição dos tempos letivos e incentivo à utilização de *software* MATLAB®, principalmente nos cursos de Engenharia. Neste sentido, este livro está organizado em cinco capítulos – Revisão de conceitos elementares, Cálculo matricial e determinantes, Sistemas de equações lineares, Espaços vetoriais e transformações lineares e Geometria analítica – ao longo dos quais se procurou obedecer a uma estrutura evolutiva em torno do rigor e da formalidade, mas sem excessos de nomenclatura.

No final de cada capítulo, é proporcionado um conjunto de exercícios variados e não repetitivos, em número suficiente e equilibrado, apresentando-se alguns deles já resolvidos, propondo-se outros para resolução e ilustrando algumas aplicações práticas de integração de conhecimentos, recorrendo ao *software* MATLAB®.

Sobre os autores

Os autores são docentes no Departamento de Matemática do Instituto Superior de Engenharia do Porto (ISEP).

Ana C. Meira Castro é doutorada em Ciências de Engenharia e investigadora no CIGAR – Centro de Investigação em Geoambientes e Recursos na área de geoambiente e análise de risco. Os seus principais interesses focam aquisição e análise de dados, modelação e análise de risco.

Ana Júlia Viamonte é doutorada em Ciências, área de Matemática e área específica de Álgebra Linear Numérica e investigadora no LEMA – Laboratório de Engenharia Matemática do ISEP na área de didática do ensino da matemática e álgebra linear numérica.

António Varejão Sousa é doutorado em Ciências de Engenharia e investigador no INEB – Instituto de Engenharia Biomédica na área de processamento e análise de imagem biomédica. Os seus principais interesses focam processamento e análise de dados.

também disponível
formato e-book

www.engebook.com

ISBN: 978-989-723-044-8

Publindústria